

Μελέτη ειδικών συναρτήσεων

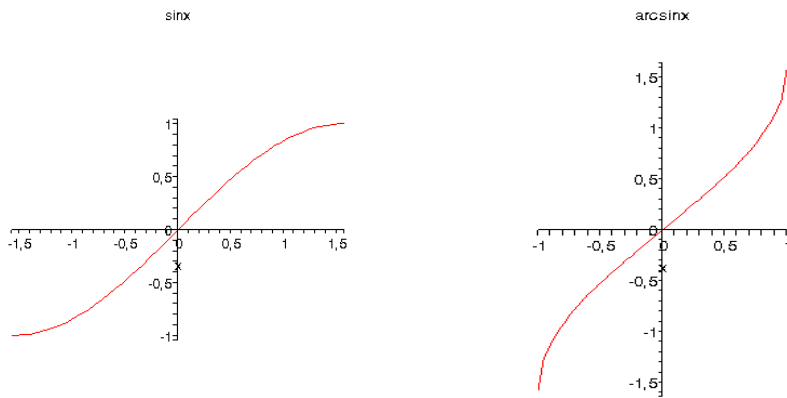
Αντίστροφες Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

Τόξο ημιτόνου

Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$ στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι γνησίως αύξουσα οπότε είναι αντιστρέψιμη. Συμβολίζουμε την αντίστροφή της με $\arcsin x$. Έτσι

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Τα γραφήματα των $\sin x$ και $\arcsin x$ είναι



Θεώρημα 1. Έστω $y = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

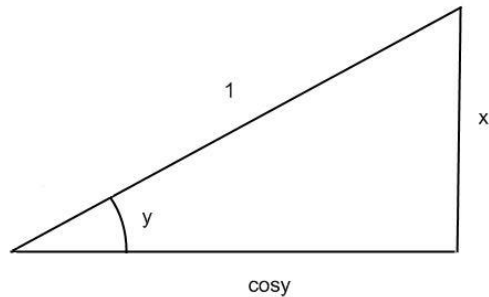
Απόδειξη. Η $\arcsin x$ είναι παραγωγίσιμη (γιατί;). Επειδή $y = \arcsin x$ έχουμε ότι $\sin y = x$.

Παραγωγίζοντας ως προς x έχουμε

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1, \text{ οπότε}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}. \quad (1)$$

Για να εκφράσουμε την $\frac{dy}{dx}$ ως συνάρτηση του x πρέπει να εκφράσουμε το $\cos y$ ως συνάρτηση του x . Από το παρακάτω σχήμα,



βλέπουμε ότι

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2), $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Άσκηση

Να υπολογίσετε τα παρακάτω

$$\arcsin(\sqrt{3}/2), \arcsin(1/2), \arcsin(-1/2).$$

Παραθέτουμε τώρα τις αντίστοιχες πληροφορίες για τις συναρτήσεις $\arccos x$, $\operatorname{arcsec} x$, $\operatorname{arccsc} x$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

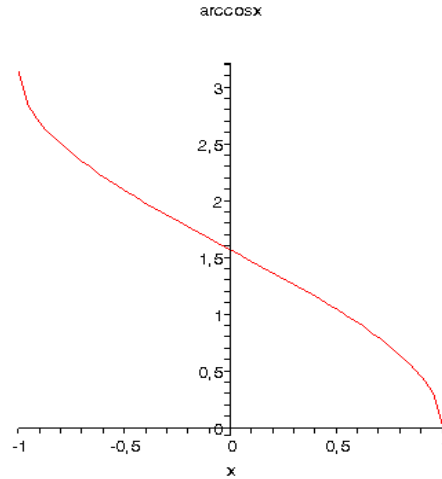
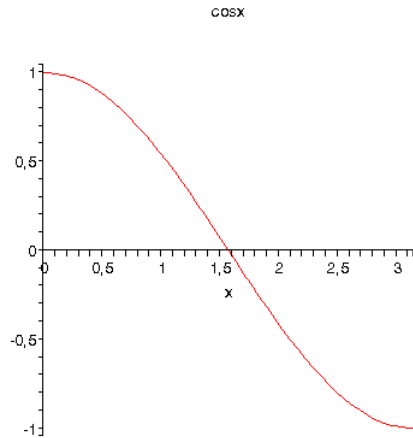
Τόξο συνημιτόνου

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y, \quad y \in [0, \pi].$$

Θεώρημα 2 Αν $y = \arccos x$, $x \in (-1, 1)$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Τα γραφήματα των $\cos x$, $\arccos x$:



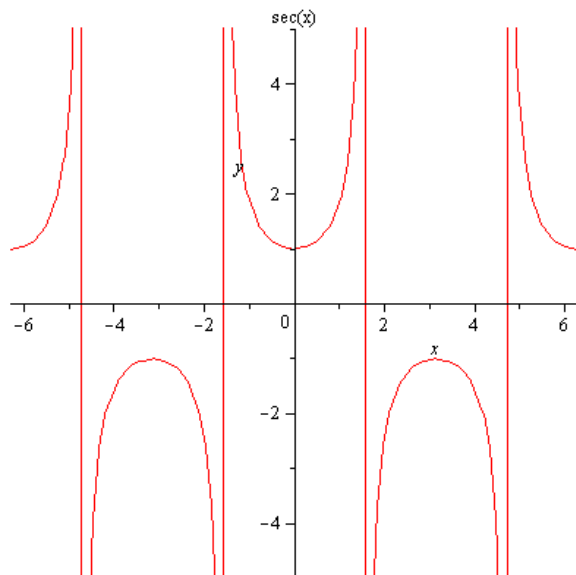
Άσκηση

Να υπολογίσετε τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$\arccos\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right), \arccos \frac{1}{x}, \arcsin(\cos x).$$

Τόξο τέμνουσας

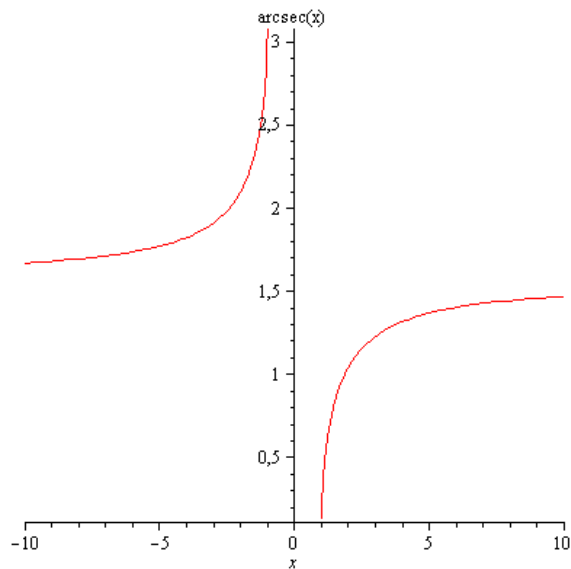
Υπενθυμίζουμε ότι $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Το γράφημά της είναι



$$y = \operatorname{arcsec} x, \quad x \geq 1 \Leftrightarrow x = \sec y, \quad y \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$y = \operatorname{arcsec} x, \quad x \leq -1 \Leftrightarrow x = \sec y, \quad y \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$$

Το γράφημα της $y = \operatorname{arcsec} x$, $|x| > 1$ είναι



Θεώρημα 3. Έστω $y = \operatorname{arcsec} x$, $|x| > 1$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Τόξο συντέμνουσας

Υπενθυμίζουμε ότι $\csc x = \frac{1}{\sin x}$.

$$y = \operatorname{arccsc} x, \quad x \geq 1 \Leftrightarrow x = \csc y, \quad y \in (0, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = \operatorname{arccsc} x, \quad x \leq -1 \Leftrightarrow x = \csc y, \quad y \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}]$$

Θεώρημα 4. Έστω $y = \operatorname{arccsc} x$, $|x| > 1$. Τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

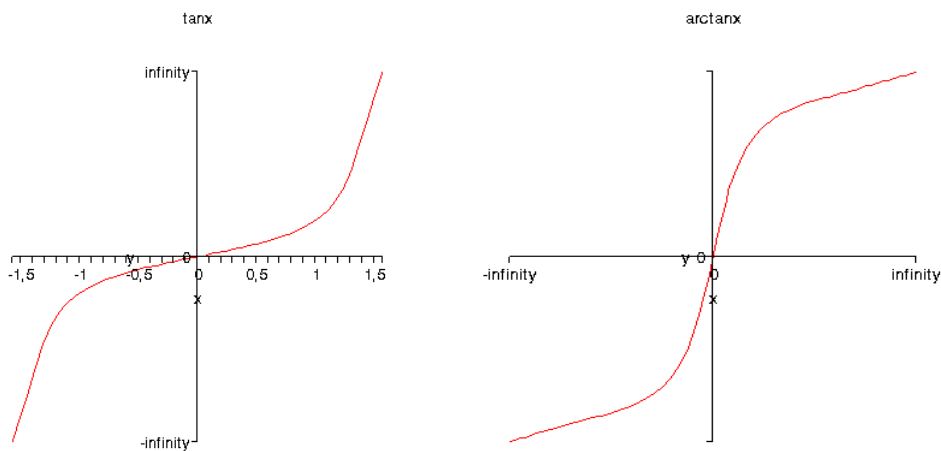
Τόξο εφαπτομένης

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Θεώρημα 5. Αν $y = \arctan x$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Τα γραφήματα των $\tan x, \arctan x$:



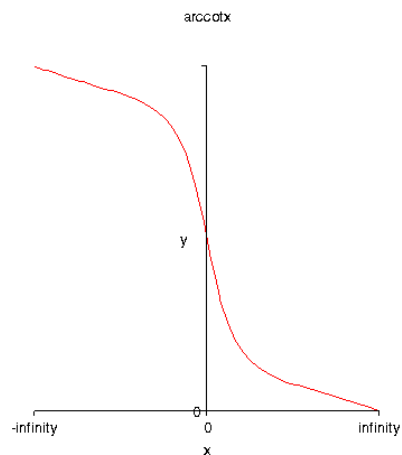
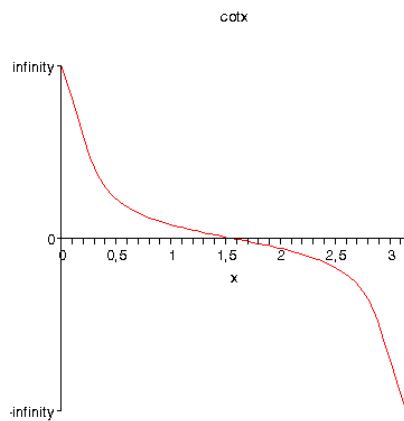
Τόξο συνεφαπτομένης

$$y = \operatorname{arccot} x \Leftrightarrow x = \cot y, \quad y \in (0, \pi).$$

Θεώρημα 6. Αν $y = \operatorname{arccot} x$, τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Τα γραφήματα των $\cot x, \operatorname{arccot} x$:



Ασκήσεις

α) Σχεδιάστε το γράφημα των συναρτήσεων

$$y = \arctan 2x, \quad y = \arcsin \frac{x}{2}.$$

β) Υπολογίστε τις παραγώγους των συναρτήσεων

$$y = \arccos 3x, \quad y = \arctan \frac{1}{x}, \quad y = \operatorname{arccot} \frac{x+1}{1-x}.$$

γ) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad \int \frac{dx}{1+16x^2}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-5}}, \quad \int \frac{dx}{3x^2+7}.$$