

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

Αυτές οι εξισώσεις έχουν τη μορφή

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (1.1)$$

όπου ο n είναι ένας φυσικός αριθμός, με $y^{(n)}(x)$ συμβολίζουμε την n -οστή παράγωγο της y , οι $a_0, a_1, \dots, a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί και η f είναι μια συνάρτηση του x . Ο φυσικός n θα λέγεται τάξη της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα

Η εξίσωση $2y^{(3)}(x) - 6y''(x) + y = 7x^2 - 2$ είναι τρίτης τάξης, η εξίσωση $4y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 7$ είναι δεύτερης τάξης.

Για διευκόλυνση θα παραλείπομε το x από το αριστερό μέλος της (1.1).

1. Ομογενείς εξισώσεις

Όταν $f(x) = 0$ η εξίσωση (1.1) θα λέγεται ομογενής.

Θα δούμε μερικά παραδείγματα.

Για να λύσουμε την εξίσωση

$$y' - 3y = 0 \quad (1.2)$$

θέτομε $y = e^{\rho x}$, οπότε $y' = \rho e^{\rho x}$. Αντικαθιστώντας στην (1.2) παίρνουμε $0 = y' - 3y = \rho e^{\rho x} - 3e^{\rho x} = e^{\rho x}(\rho - 3)$ η οποία δίνει $\rho = 3$. Άρα η συνάρτηση $y = e^{3x}$ είναι μια λύση της (1.2). Παρατηρούμε ότι κάθε πολλαπλάσιο ce^{3x} της λύσης αυτής είναι επίσης λύση, άρα η γενική λύση της (1.2) είναι η

$$y = ce^{3x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Το πολυώνυμο $\rho - 3$ θα λέγεται χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1.2).

Ας δούμε τώρα την εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad (1.3)$$

Θέτομε $y = e^{\rho x}$, οπότε $y' = \rho e^{\rho x}$ και $y'' = \rho^2 e^{\rho x}$. Αντικαθιστώντας στην (1.3) έχουμε $(\rho^2 - 3\rho + 2)e^{\rho x} = 0$, οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της (1.3) είναι το $\rho^2 - 3\rho + 2 = (\rho - 1)(\rho - 2)$. Οι αριθμοί 1, 2 είναι οι ρίζες του πολυωνύμου, άρα οι

συναρτήσεις e^x, e^{3x} είναι λύσεις της (1.2). Έτσι η γενική λύση της (1.3) είναι η $y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Η διαφορική εξίσωση

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (1.4)$$

έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $\rho^2 - 2\rho + 1 = (\rho - 1)^2$, δηλαδή η $\rho = 1$ είναι διπλή ρίζα. Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις e^x, xe^x είναι λύσεις της (1.4), οπότε η γενική λύση της είναι η $y = c_1 e^x + c_2 x e^x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Εν γένει, η γενική λύση μιας εξίσωσης πρώτης τάξης περιλαμβάνει μια σταθερά c_1 , η γενική λύση μιας εξίσωσης δεύτερης τάξης περιλαμβάνει δύο σταθερές c_1, c_2 , η γενική λύση μιας εξίσωσης τρίτης τάξης περιλαμβάνει τρεις σταθερές c_1, c_2, c_3 κλπ.

Για τον προσδιορισμό αυτών των σταθερών απαιτούνται οι λεγόμενες αρχικές συνθήκες οι οποίες προσδιορίζουν τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης y και των παραγώγων της σε ένα σημείο του $\mathbb{R}$. Στην περίπτωση της (1.4) θα μπορούσαμε να έχουμε ως αρχικές συνθήκες τις $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Έτσι $1 = y(0) = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 e^0$, οπότε $c_1 = 1$. Επίσης, επειδή $y' = c_1 e^x + c_2 e^x + c_2 x e^x$, θα έχουμε ότι $2 = y'(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 + c_2 \cdot 0 e^0 = 1 + c_2$, οπότε $c_2 = 1$. Άρα η λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι η $y = e^x + x e^x$.

2. Μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις

Όταν $f(x) \neq 0$ τότε η (1.1) θα λέγεται μη ομογενής. Η εξίσωση $y'' - 3y' + 2y = 2$ είναι μη ομογενής. Παρατηρήστε ότι η $y_e = 1$ είναι μια λύση της. Κάθε λύση της μη ομογενούς θα λέγεται ειδική λύση.

Ισχύει ότι η γενική λύση της μη ομογενούς είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς.

Άρα η γενική λύση της $y'' - 3y' + 2y = 2$ είναι η $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + 1, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Για να υπολογίσουμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς για κάποιες συναρτήσεις f χρησιμοποιούμε τον παρακάτω πίνακα:

συνάρτηση f	ειδική λύση y_ϵ
$e^{\lambda x}$	$ce^{\lambda x}$, c μια σταθερά
πολυώνυμο βαθμού k	πολυώνυμο βαθμού k
πολυώνυμο βαθμού k επί $e^{\lambda x}$	πολυώνυμο βαθμού k επί $e^{\lambda x}$

Παραδείγματα

Έστω $f(x) = 2x^2 - 1$, τότε υποθέτουμε ότι η ειδική λύση y_ϵ είναι ένα πολυώνυμο που έχει τον ίδιο βαθμό με την f . Δηλαδή, $y_\epsilon = ax^2 + bx + c$ και βρίσκουμε τα a, b, c από τη σχέση $y_\epsilon'' - 3y_\epsilon' + 2y_\epsilon = 2x^2 - 1$. Υπολογίζουμε κατ'αρχάς τις

$$y_\epsilon' = 2ax + b, \quad y_\epsilon'' = 2a,$$

οπότε θα έχουμε

$$2a - 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 2x^2 - 1,$$

$$\Rightarrow 2ax^2 + (2b - 6a) + 2a - 3b + 2c = 2x^2 - 1,$$

που δίνει

$$a = 1, \quad b = 3a, \quad 2a - 3b + 2c = -1.$$

Έτσι, $a = 1$, $b = 3$, $c = 3$. Άρα μια ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η $y_\epsilon = x^2 + 3x + 3$.

Ασκήσεις

Να βρείτε την γενική λύση για τις επόμενες εξισώσεις

$$y'' - 4y' + 3y = x, \quad 4y'' - 4y' + 3y = x^2, \quad 4y'' - 4y' + 3y = 2$$

$$y'' + 3y' + 2y = 1, \quad y'' + 3y' + 2y = e^{2x}$$