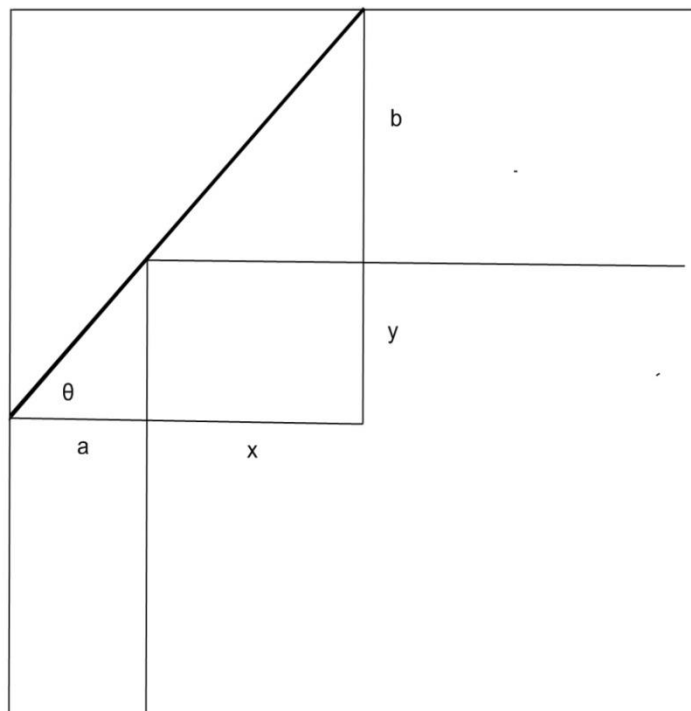


## Εφαρμογές της παραγώγου σε διάφορα προβλήματα

1. Έχουμε δύο διαδρόμους πλάτους  $a, b$  αντίστοιχα οι οποίοι τέμνονται σε ορθή γωνία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος της μεγαλύτερης σανίδας που μπορεί να διέλθει (σε οριζόντια θέση) από τον ένα διάδρομο στον άλλο.



Παρατηρούμε ότι  $x = \frac{b}{\tan \theta}$ ,  $y = a \tan \theta$ , οπότε το μήκος της σανίδας είναι η τετραγωνική ρίζα της έκφρασης

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = \left( \frac{b}{\tan \theta} + a \right)^2 + (a \tan \theta + b)^2.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

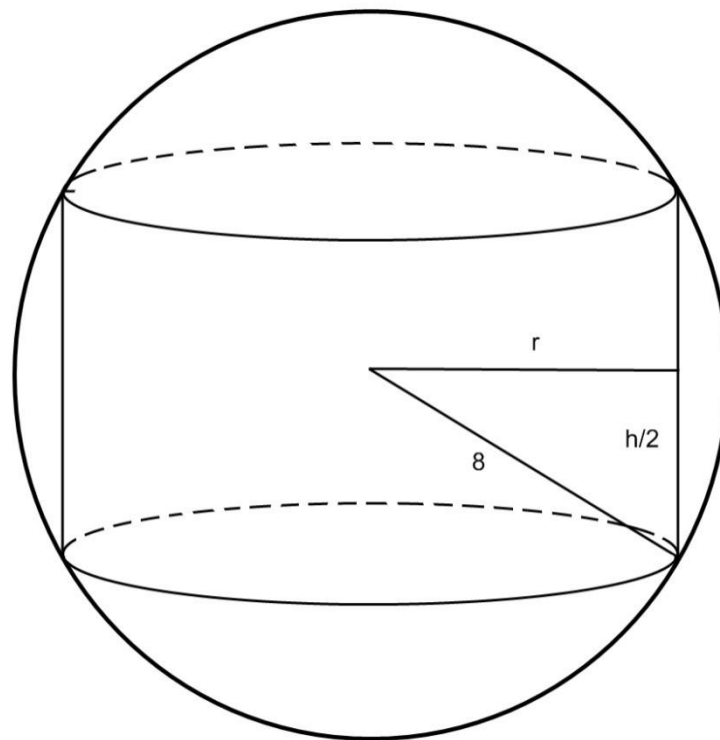
$$f(\theta) = \left( \frac{b}{\tan \theta} + a \right)^2 + (a \tan \theta + b)^2, \quad \theta \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

της οποίας αναζητούμε το ελάχιστο (γιατί;). Μηδενίζοντας την παράγωγό της έχουμε

$$\left(\frac{b}{\tan\theta} + a\right)\left(\frac{b}{\tan\theta}\right)' + (a\tan\theta + b)(a\tan\theta)' = 0$$

η οποία δίνει  $\tan^3\theta = \frac{b}{a}$ . Να αποδείξετε ότι για την συγκεκριμένη τιμή της  $\theta$  έχουμε όντως ελάχιστο για την  $f$ .

2. Να ευρεθούν οι διαστάσεις του ορθού κυλίνδρου με τον μέγιστο όγκο ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σε μία σφαίρα ακτίνας 8 μονάδων.



Θεωρούμε ένα κύλινδρο με ακτίνα βάσης  $r$  και ύψος  $h$ . Ο όγκος του είναι  $\pi r^2 h$ .

Παρατηρούμε ότι  $r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 64$ , οπότε  $h = 2\sqrt{64 - r^2}$ . Βλέπουμε λοιπόν ότι ο όγκος

του κυλίνδρου σαν συνάρτηση της ακτίνας της βάσης του είναι  $2\pi r^2 \sqrt{64 - r^2}$ .

Προφανώς ο όγκος του κυλίνδρου είναι μέγιστος στα σημεία μεγίστου της συνάρτησης

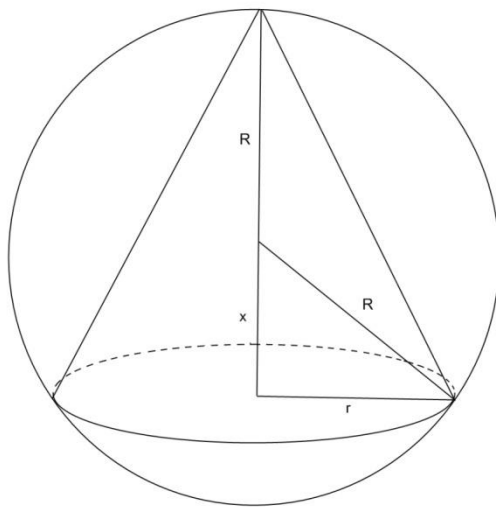
$$f(r) = r^2 \sqrt{64 - r^2}, \quad r \in [0, 8].$$

Η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο στο ή στα σημεία μηδενισμού της παραγώγου της (γιατί;). Έτσι, λύνοντας την εξίσωση  $2r\sqrt{64-r^2} + \frac{1}{2}r^2 \frac{1}{\sqrt{64-r^2}}(-2r) = 0$

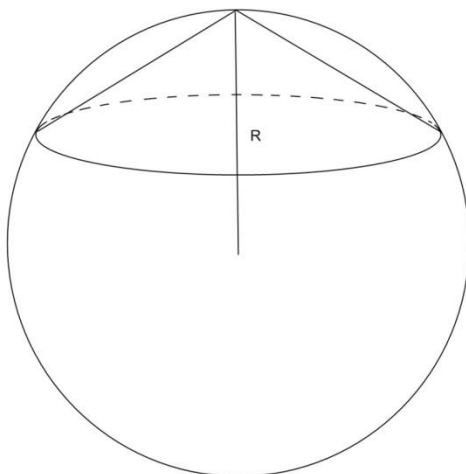
παίρνουμε  $r = \sqrt{\frac{128}{3}}$ . Γιατί η  $f$  έχει μέγιστο σ' αυτό το σημείο;

**3.** Να υπολογισθούν οι διαστάσεις του ορθού κυκλικού κώνου με τον μέγιστο όγκο ο οποίος είναι εγγεγραμμένος σε μία σφαίρα ακτίνας  $R$ .

Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:



και



Με την δεύτερη περίπτωση δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε (γιατί;).

Ο όγκος του κώνου της πρώτης περίπτωσης είναι  $\frac{1}{3}\pi r^2(R+x)$ . Παρατηρούμε ότι  $x = \sqrt{R^2 - r^2}$ , οπότε ο όγκος, ως συνάρτηση του  $r$ , είναι  $\frac{1}{3}\pi r^2\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right)$ . Είναι προφανές ότι ο όγκος του κώνου γίνεται μέγιστος στα σημεία μεγίστου της συνάρτησης  $g(r) = r^2\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right)$ ,  $r \in [0, R]$ . Η συνάρτηση αυτή έχει μέγιστο είτε στα άκρα του διαστήματος  $[0, R]$  είτε στα σημεία μηδενισμού της παραγώγου της στο  $(0, R)$ . Η παράγωγος μηδενίζεται στα σημεία που ικανοποιούν

$$\begin{aligned} 2r\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right) + r^2 \frac{1}{2} \frac{-2r}{\sqrt{R^2 - r^2}} &= 0 \\ \Rightarrow 2\left(R + \sqrt{R^2 - r^2}\right) &= \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Όμως  $x = \sqrt{R^2 - r^2}$ , οπότε η (1) γίνεται

$$2(R+x) = \frac{R^2 - x^2}{x} \Rightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0.$$

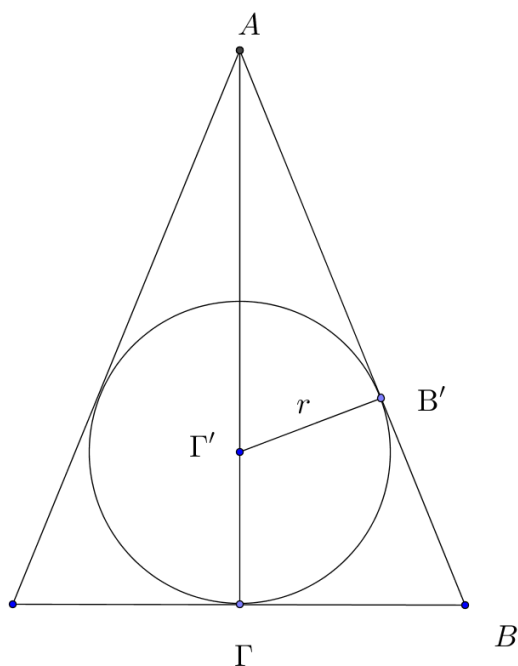
Το τριώνυμο αυτό έχει μοναδική θετική ρίζα την  $x = \frac{R}{3}$ . Έτσι  $r = \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$

και  $h = R + \frac{R}{3} = \frac{4}{3}R$ .

Μπορείτε τώρα να συγκρίνετε τις τιμές της συνάρτησης  $g$  στα άκρα του

διαστήματος με την τιμή της στο  $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$ .

4. Να βρείτε τις διαστάσεις του ισοσκελούς τριγώνου περιγεγραμμένου σε ένα κύκλο ακτίνας  $r$  που έχει το ελάχιστο εμβαδόν.



Έστω  $h = A\Gamma'$ ,  $x = B\Gamma$ ,  $y = AB'$ . Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την έκφραση  $x(h + r)$ .

Τα τρίγωνα  $AB'\Gamma'$ ,  $AB\Gamma$  είναι όμοια, άρα

$$\frac{y}{h+r} = \frac{r}{x}.$$

Όμως  $y = \sqrt{h^2 - r^2}$ , οπότε  $\frac{\sqrt{h^2 - r^2}}{h+r} = \frac{r}{x}$ . Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε

$$x^2(h^2 - r^2) = r^2(h + r)^2. \text{ Άρα } x^2 = \frac{r^2(h+r)^2}{(h^2 - r^2)} = \frac{r^2(h+r)}{h-r}.$$

Παρατηρούμε ότι  $[x(h + r)]^2 = \frac{r^2(h+r)^3}{h-r}$  (το εμβαδόν του τριγώνου στο τετράγωνο).

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(h) = \frac{(h+r)^3}{h-r}$ . Θέτοντας την παράγωγό της ίση με το 0 παίρνουμε  $h = 2r$ . Από την ομοιότητα των τριγώνων  $AB'\Gamma'$ ,  $AB\Gamma$  έχουμε

$$\frac{x+y}{h} = \frac{x}{r},$$

οπότε

$$\frac{x+y}{2r} = \frac{x}{r},$$

δηλαδή  $x = y$ . Άρα το εμβαδόν ελαχιστοποιείται όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

### Ασκήσεις

1. Να βρείτε το σημείο της παραβολής  $y^2 = x$  του οποίου η απόσταση από το σημείο  $(1,2)$  είναι η ελάχιστη δυνατή.
2. Να βρείτε τους δύο αριθμούς με άθροισμα 100 το γινόμενο των οποίων είναι το μέγιστο δυνατό.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο  $(1,3)$  και σχηματίζει με τους άξονες το τρίγωνο με το ελάχιστο εμβαδόν.