

Η κρεμαστή αλυσίδα του Γαλιλαίου

The Gateway Arch

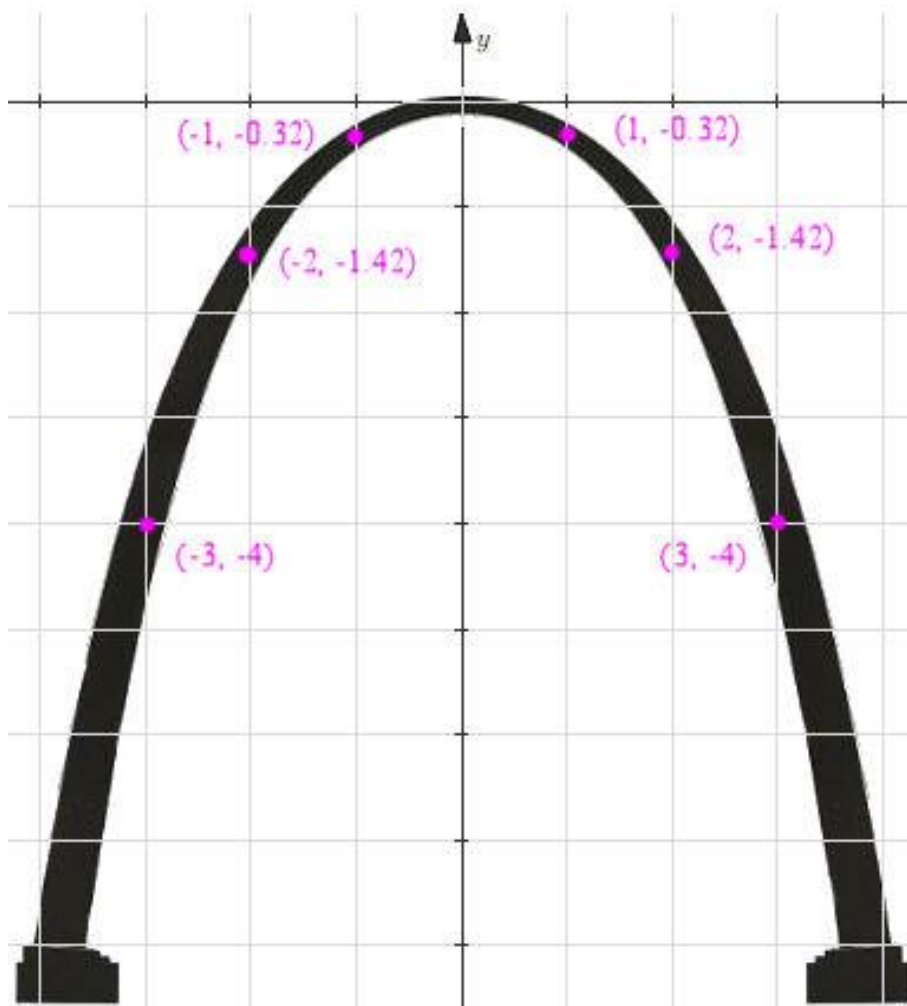




Αυτή η αψίδα βρίσκεται στην πόλη St. Louis της πολιτείας του Missouri, ΗΠΑ. Η πόλη αυτή ιδρύθηκε το 1764 από τους εμπόρους γούνας Pierre Laclède and Auguste Chouteau και πήρε το όνομα του βασιλιά Louis IX της Γαλλίας. Σχεδιάστηκε από τον Eero Saarinen το 1948 και κατασκευάστηκε μεταξύ 1963 και 1965. Έχει ύψος 192 μέτρα.

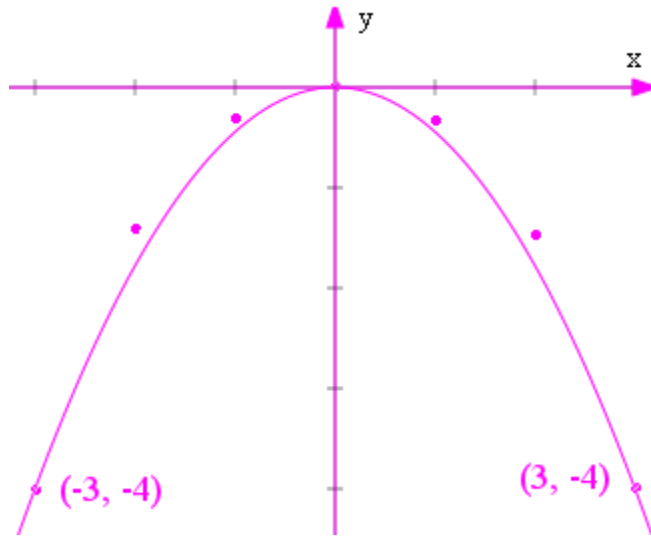
Τι σχήμα έχει η αψίδα και για ποιό λόγο;

Απο μια γρήγορη ματιά φαίνεται ότι η αψίδα είναι μια παραβολή. Για να διαπιστώσουμε αν αυτός ο ισχυρισμός ισχύει, σχεδιάζουμε την αψίδα σε ένα σύστημα συντεταγμένων:



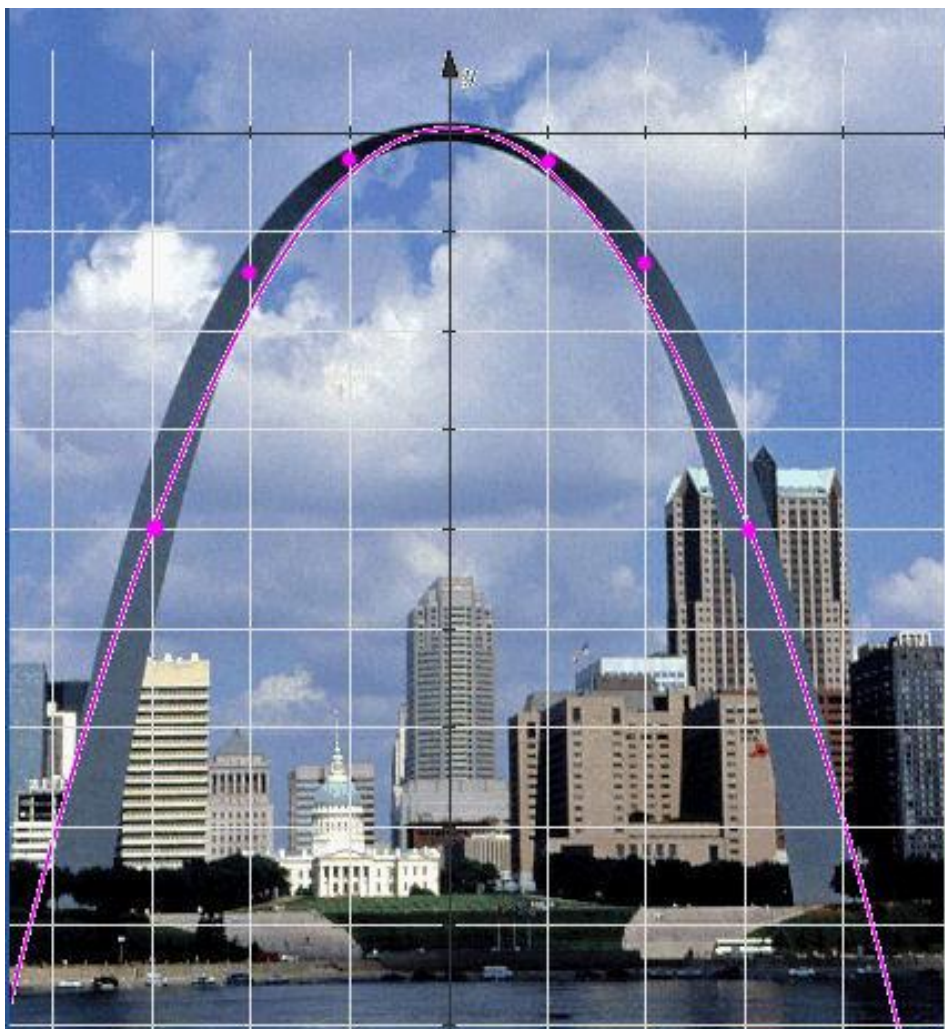
Ο γενικός τύπος της παραβολής είναι $y = ax^2 + bx + c$. Έχουμε λοιπόν 3 αγνώστους τους οποίους θα υπολογίσουμε χρησιμοποιώντας τα τρία σημεία $(0,0)$, $(-3,-4)$ και $(3,-4)$.

Μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι $y = -\frac{4}{9}x^2$. Σχεδιάζουμε την παραβολή αυτή και τα έξι σημεία:



Είναι εμφανές ότι η παραβολή δεν διέρχεται απο 4 σημεία.

Σχεδιάζοντας την παραβολή πάνω στην φωτογραφία παρατηρούμε ότι η παραβολή δεν περιγράφει την αψίδα.



Τα παραπάνω προέρχονται από τον ιστότοπο:

<https://www.intmath.com/blog/mathematics/is-the-gateway-arch-a-parabola-4306>

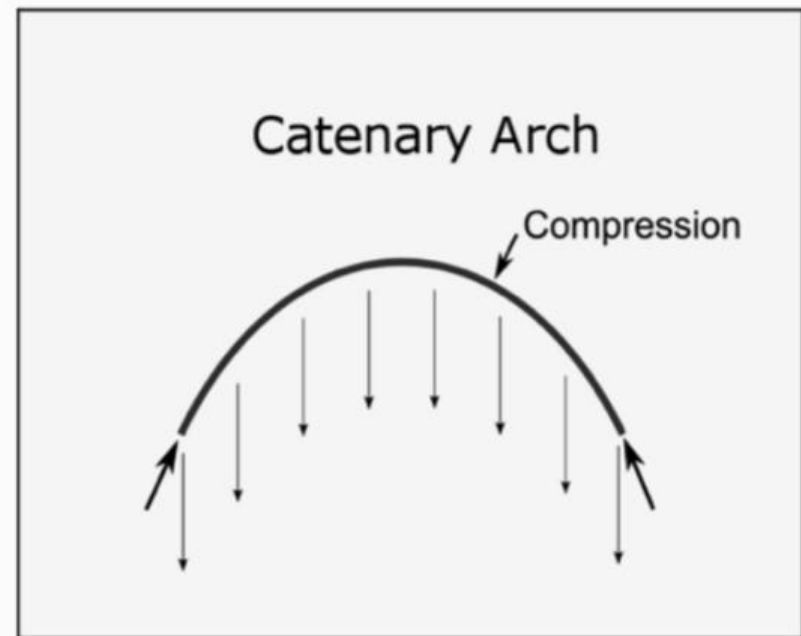
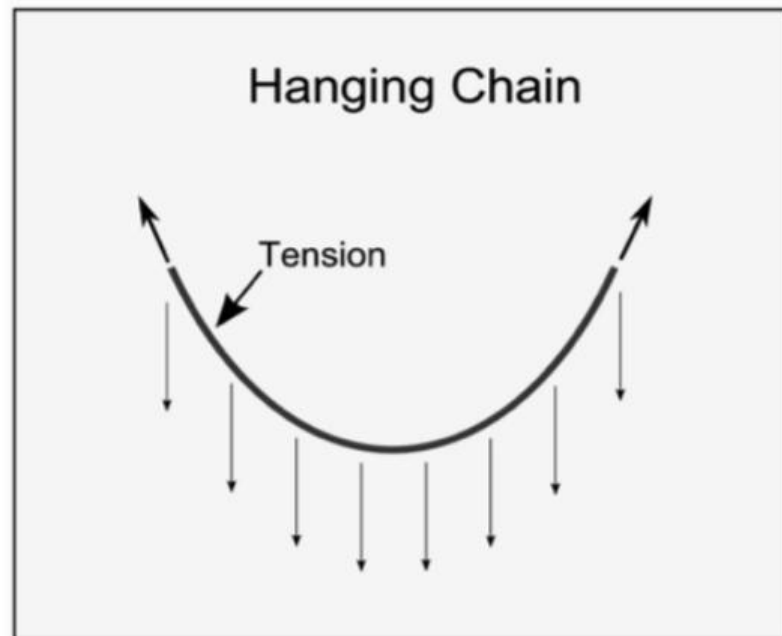
Θα δούμε τώρα για ποιό λόγο η αψίδα πήρε αυτό το σχήμα.

Θεωρούμε μια αλυσίδα δεδομένου μήκους η οποία συγκρατείται από δύο σημεία.



Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι το σχήμα που θα έχει η αλυσίδα. Ο Γαλιλαίος στο βιβλίο του “Discourses” το 1638 ισχυρίστηκε ότι το σχήμα αυτό μοιάζει με παραβολή.

Ο Robert Hooke το 1671 διατύπωσε ένα εμπειρικό κανόνα: Αν αντιστρέψουμε το σχήμα της αλυσίδας όταν αυτή κρέμεται ώστε να πάρει την μορφή της αψίδας, τότε έχουμε την καλύτερη δυνατή κατανομή του βάρους της.



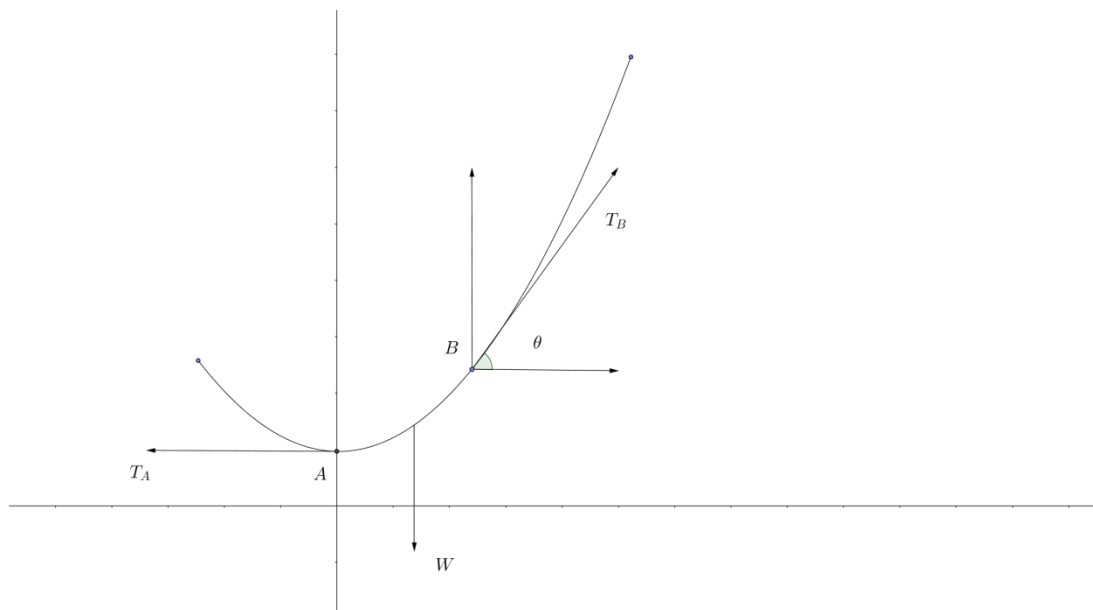
Ο Huygens, σε μια επιστολή του στον Leibniz το 1690, αναφέρθηκε στην αλυσίδα ονομάζοντας το σχήμα που παίρνει catenary (από την λατινικά λέξη catena). Το 1691 ο Johann Bernoulli και ο Leibniz απάντησαν το ερώτημα που τέθηκε στην αρχή. Θα δούμε παρακάτω την προσέγγιση του Bernoulli.

(Το μήκος της καμπύλης $y = y(x)$ από το $x = a$ έως το $x = b$ δίνεται από τον τύπο

$$\int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx. \quad)$$

Θεωρούμε ότι η αλυσίδα έχει μήκος L και μάζα M η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη. Η πυκνότητα μάζας της αλυσίδας είναι $\rho = M/L$.

Υποθέτουμε ότι το χαμηλότερο σημείο της αλυσίδας βρίσκεται στο σημείο A του άξονα των y . Το αριστερό μέρος της αλυσίδας ασκεί στο δεξιό μέρος της την δύναμη T_A . Στο σημείο $B(x, y)$ της αλυσίδας ασκείται μια δύναμη T_B (εφαπτόμενη στην αλυσίδα) η οποία ισορροπεί το κομμάτι $\widehat{AB}$ της αλυσίδας από το A έως το B .



Η κάθετη και η οριζόντια συνιστώσα των δυνάμεων που ασκούνται στο $\widehat{AB}$ είναι μηδέν επειδή αυτό δεν κινείται. Έτσι έχουμε

$$W = \rho s g = T_B \sin \theta, \quad T_A = T_B \cos \theta,$$

όπου s είναι το μήκος του $\widehat{AB}$. Διαιρώντας κατά μέλη έχουμε

$$\tan \theta = \frac{T_B \sin \theta}{T_B \cos \theta} = \frac{\rho s g}{T_A} = \frac{1}{k} s,$$

όπου $k = \frac{T_A}{\rho s g}$. Αν η $y(x)$ είναι η συνάρτηση που περιγράφει το σχήμα της αλυσίδας, τότε η παράγωγός της στο x είναι $y'(x) = \tan \theta$, οπότε

$$y'(x) = \frac{1}{k} s = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2} dt.$$

Αυτή είναι μια διαφορική εξίσωση η οποία έχει λύση

$$y(x) = k \frac{e^{\frac{x-c}{k}} + e^{\frac{c-x}{k}}}{2} + a,$$

όπου οι a, c είναι πραγματικοί αριθμοί που εξαρτώνται από τα σημεία που κρέμεται η αλυσίδα και από το μήκος της.

<https://demonstrations.wolfram.com/CatenaryTheHangingChain/>

Η αψίδα στο St. Louis:

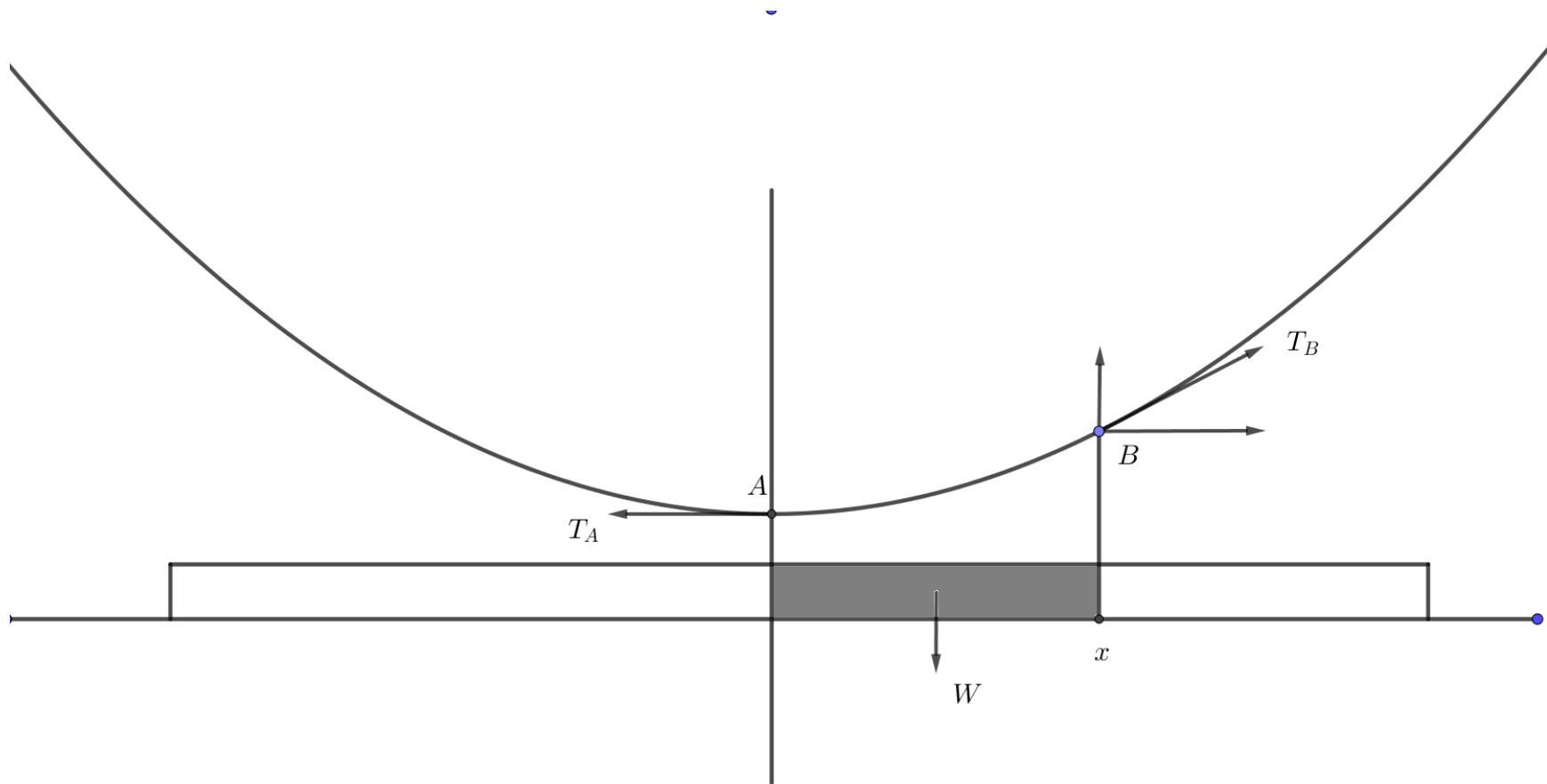
https://www.google.gr/search?q=st+louis+arch&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwig2tzkjq7JAhULWxQKHAd-D5YQ_AUIBygB&biw=1920&bih=946

είναι μια υλοποίηση της catenary.

Θα δούμε πότε το σχήμα της αλυσίδας είναι όντως μια παραβολή.



Clifton suspension bridge, Αγγλία.



Αν η αλυσίδα συγκρατεί μια γέφυρα με αρκετό βάρος (το βάρος της αλυσίδας να είναι αμελητέο σε σύγκριση με αυτό της γέφυρας) τότε έχουμε τις εξισώσεις

$$W = \rho x g = T_B \sin \theta, \quad T_A = T_B \cos \theta,$$

οπότε

$$\tan \theta = \frac{T_B \sin \theta}{T_B \cos \theta} = \frac{\rho x g}{T_A} = Kx, \quad K = \frac{\rho g}{T_A},$$

και η διαφορική εξίσωση γίνεται

$$y'(x) = Kx,$$

η οποία έχει λύση

$$y(x) = \frac{K}{2} x^2 + C, \quad C \text{ μια σταθερά,}$$

η οποία είναι μια παραβολή.

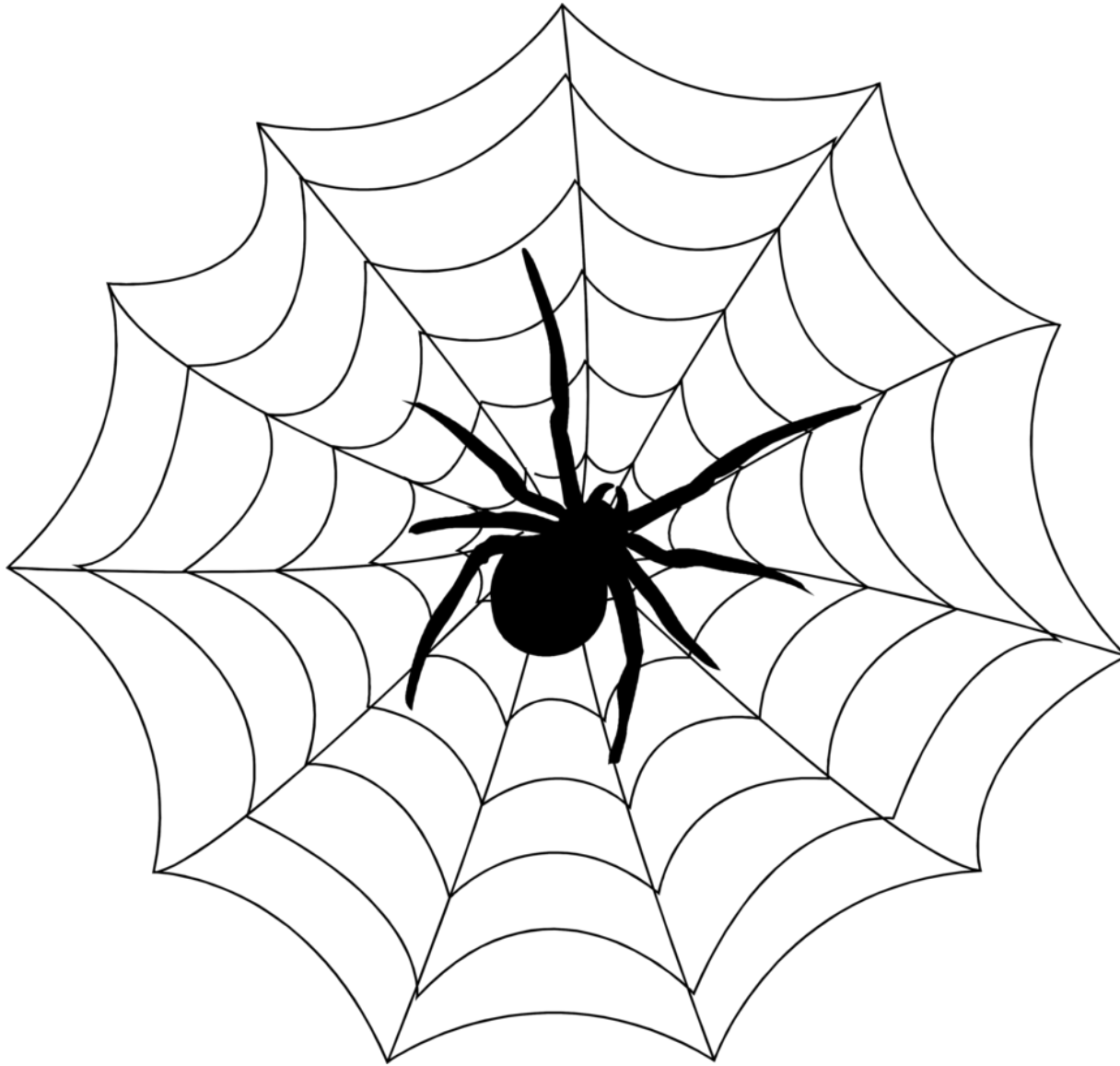




Margaret Hunt Hill bridge, Calatrava 2012. Dallas, Texas.

Η catenary στη φύση





Ιστορικά στοιχεία

Η Ρωμαϊκή αψίδα



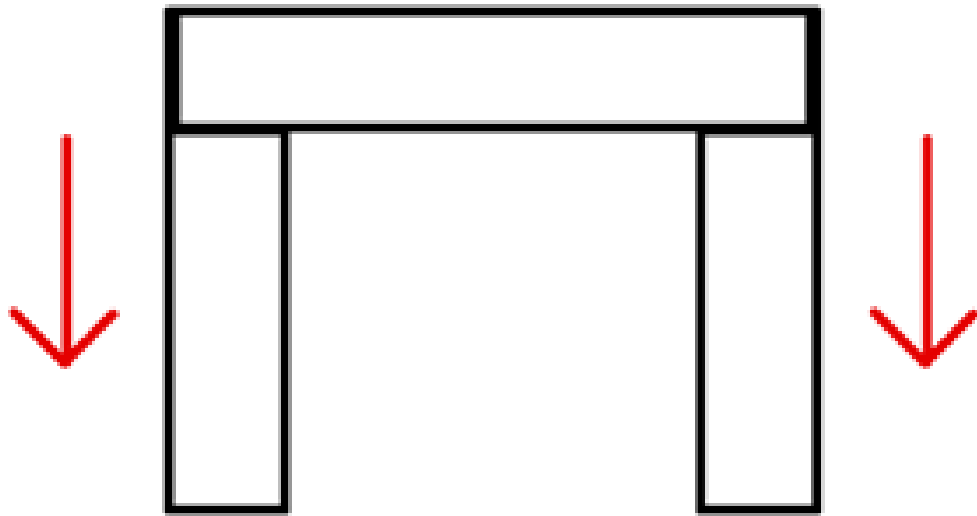
Γέφυρα Alcántara, Ισπανία, 104-106 μΧ, επί Τραιανού.

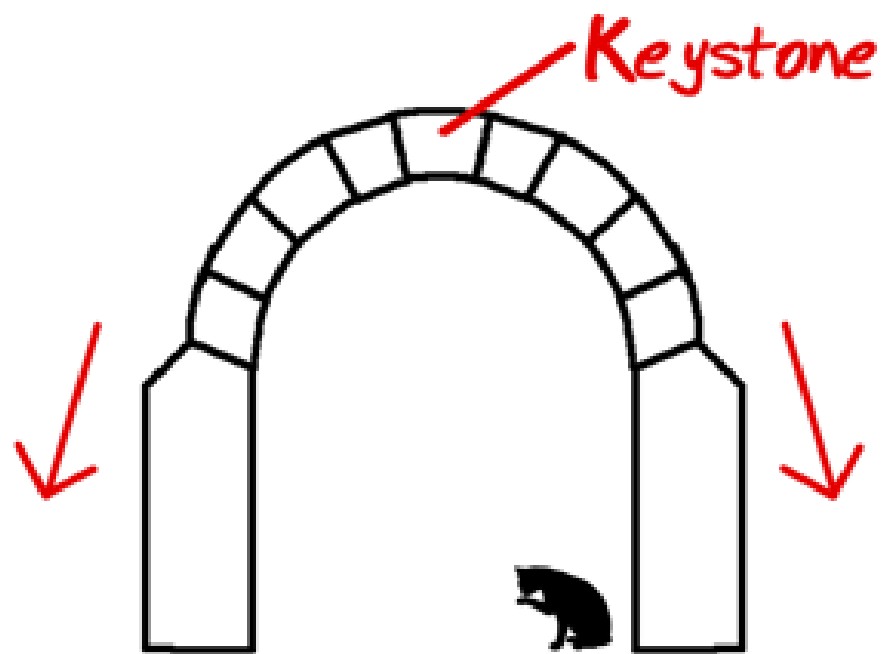


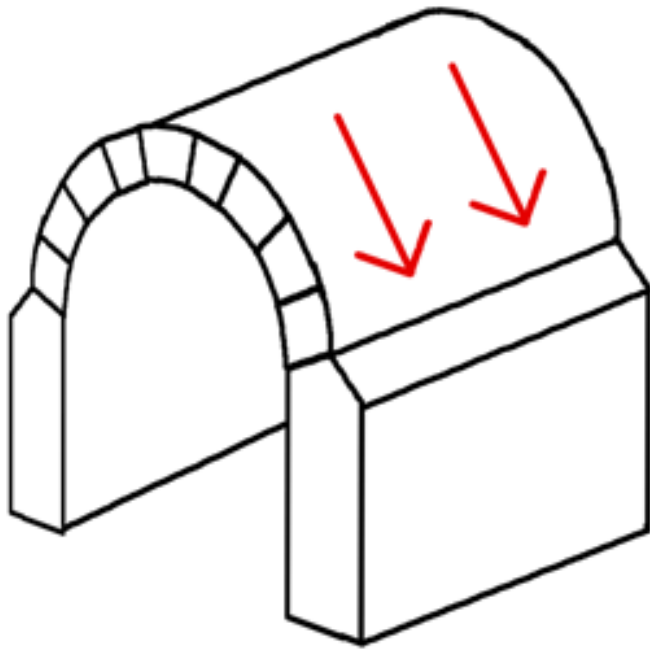
Pont du Gard, Νότια Γαλλία, 1^{ος} αιώνας μΧ. (National Geographic)

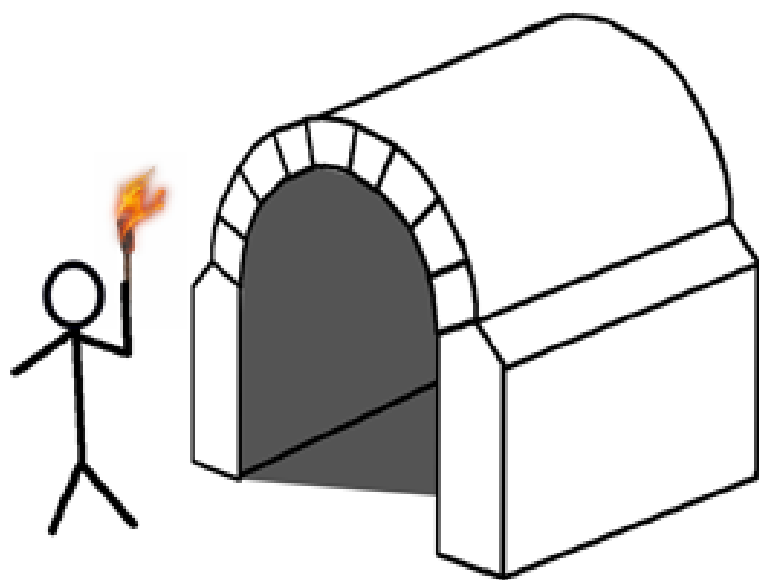


Πάνθεον (Πάνθειον, όλοι οι θεοί), Ρώμη 27-14, Μάρκος Αγρίππας- Αύγουστος. Wikipedia.

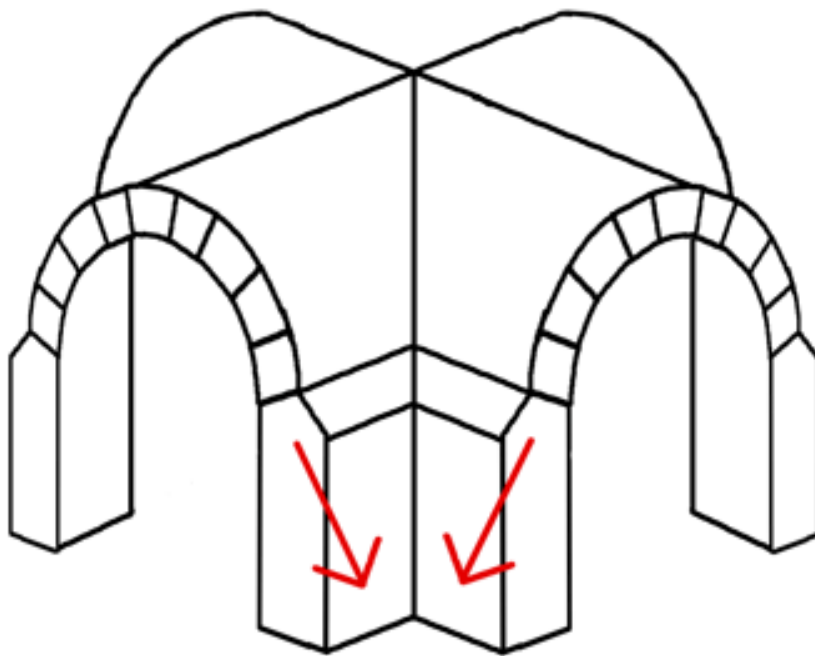




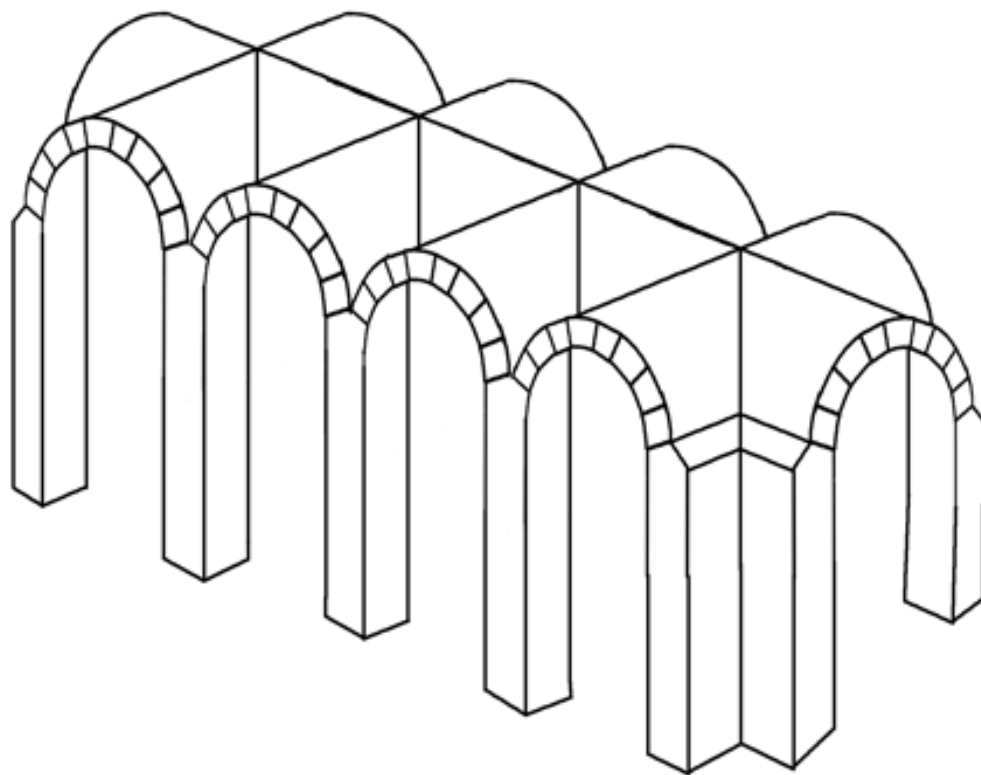




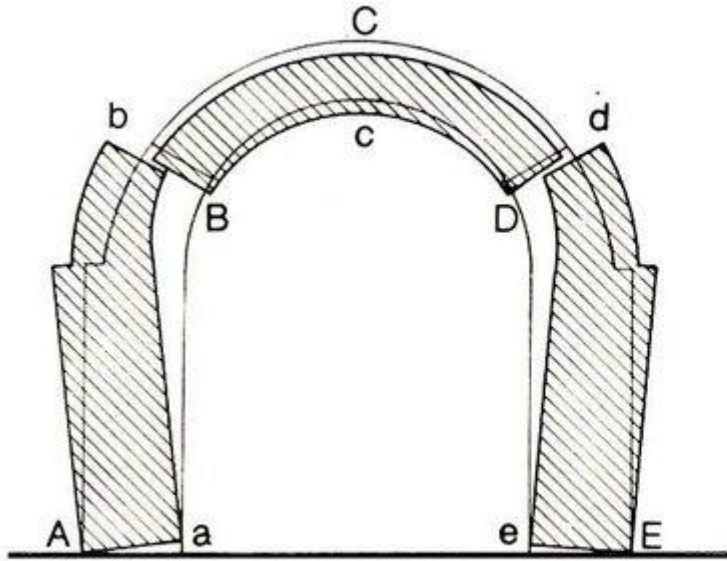
Ελλειπής φωτισμός



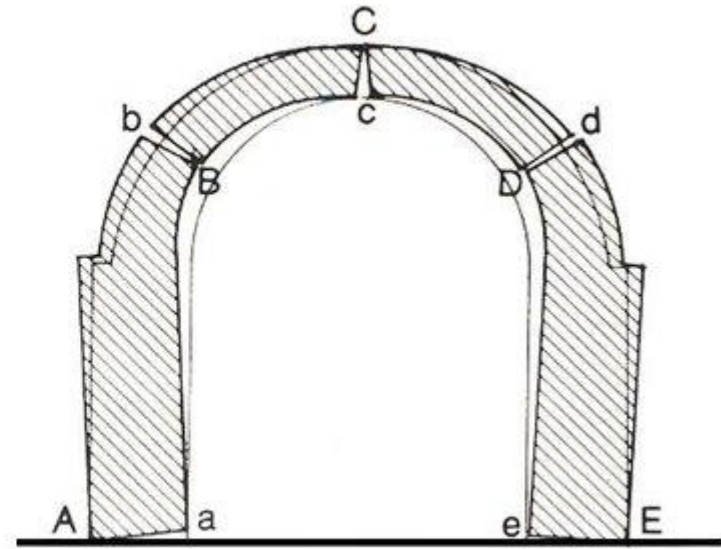
Η λύση



Σχέδια απο τον ιστότοπο medium.com, Christopher P. Jones.



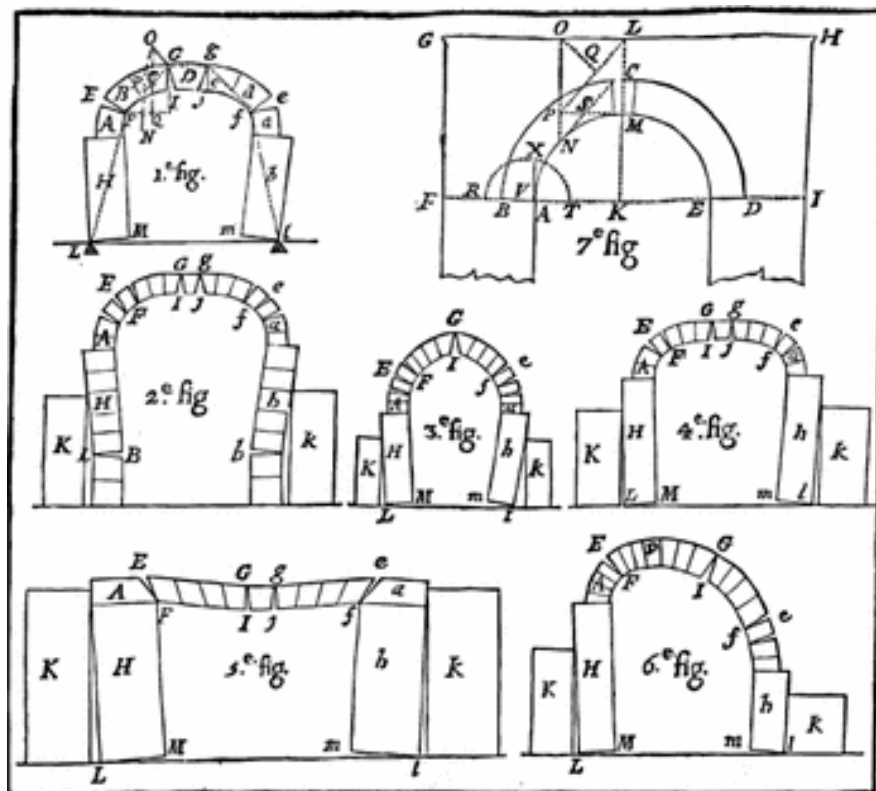
(a)



(b)

(a) Philippe de La Hire, 1640-1718,

(b) Claude Antoine Couplet, 1642-1722.



Augustin Danyzy, πειράματα με γύψο, 1732.

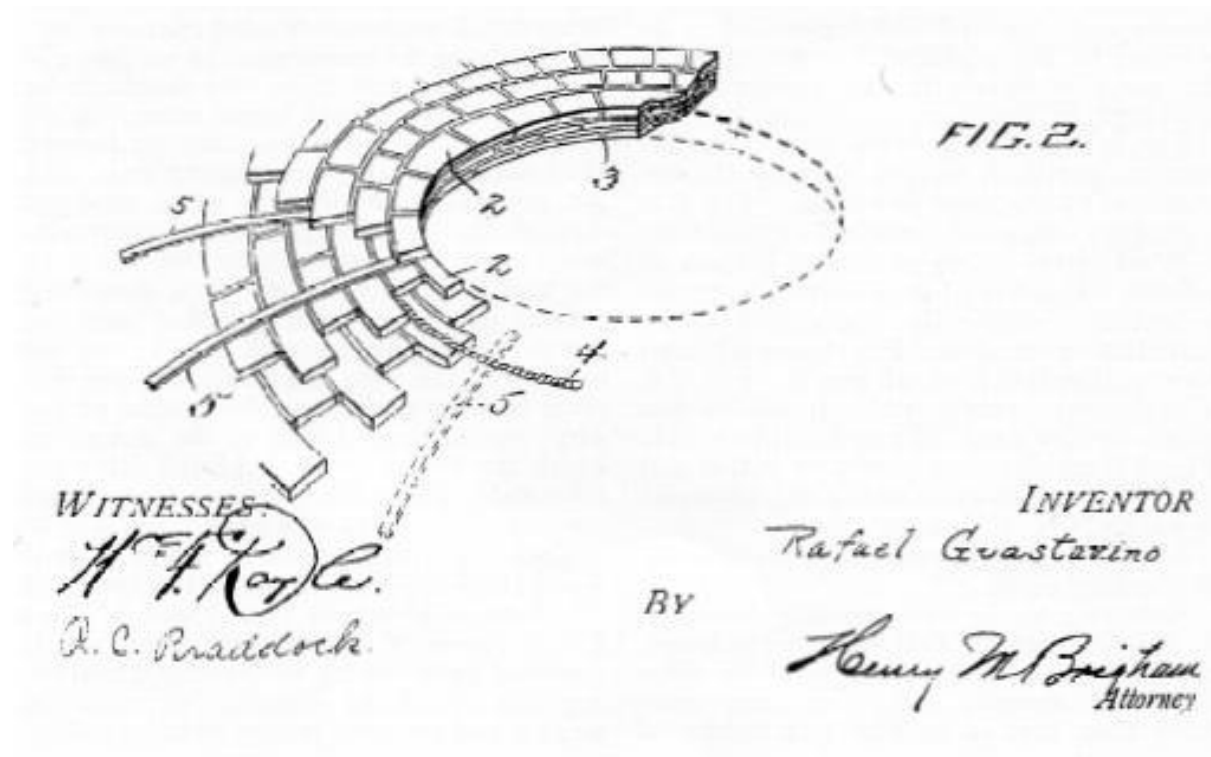
Timbrel vault, Catalan Vault, tiled vault

Δημιουργήθηκε στην Μεσόγειο κατά τον 14^ο αιώνα, δεν γνωρίζουμε τους εφευρέτες.
Ανακαλύφθηκε ξανά απο Καταλανούς αρχιτέκτονες οπαδούς της κίνησης του μοντερνισμού.



La Lonja de la Seda de Valencia (Unesco)

Εισήχθη στην Αμερική από τον Rafael Guastavino γεννηθέντα στην Βαλένθια το 1842 ο οποίος βελτίωσε τις υπάρχουσες τεχνικές.





Santa Maria del Mar (Wikipedia)

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Paul J. Nahin, When least is best, Princeton University Press, 2004.

Wikipedia

Pinterest

<https://www.lowtechmagazine.com/2008/11/tiles-vaults.html#more>

