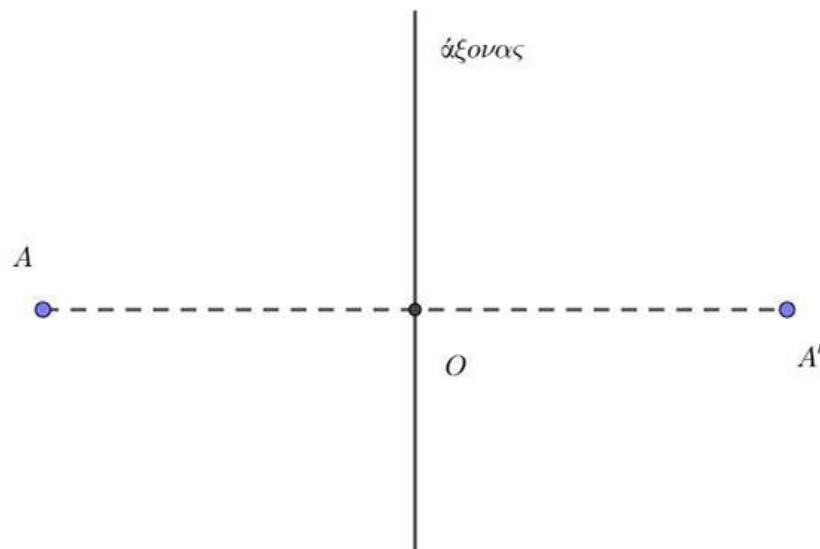


Κέντρο βάρους

Συμμετρίες στο επίπεδο

Συμμετρία ως προς άξονα

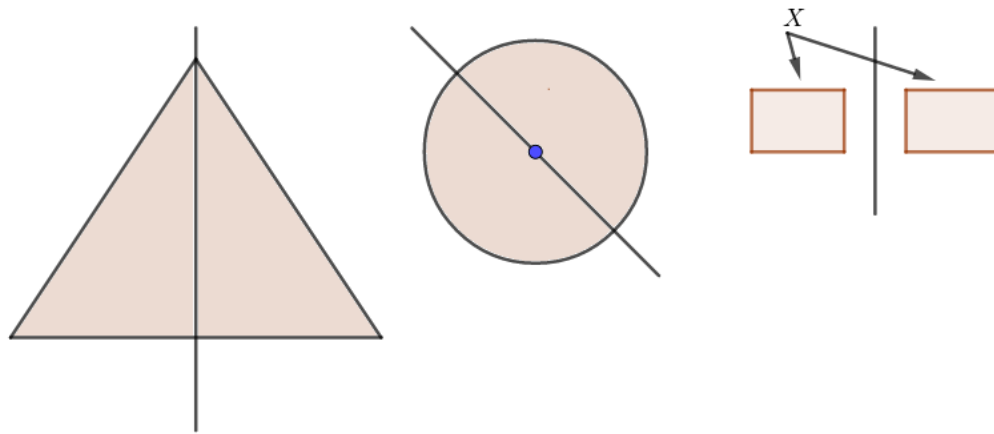
Θεωρούμε μια ευθεία στο επίπεδο την οποία θα ονομάζουμε άξονα. Έστω A ένα σημείο του επιπέδου. Από το A φέρουμε κάθετη στον άξονα τον οποίο τέμνει στο σημείο O . Επί της ευθείας που περιέχει τα O, A θεωρούμε σημείο A' τέτοιο ώστε $OA' = OA$. Το A' θα λέγεται συμμετρικό του A ως προς τον άξονα.



Σχήμα 1

Ένα αντικείμενο X στο επίπεδο θα λέγεται συμμετρικό ως προς ένα άξονα αν το X περιέχει το συμμετρικό σημείο κάθε σημείου του, δηλαδή αν το A είναι σημείο του X , τότε το συμμετρικό A' του A είναι επίσης σημείο του X .

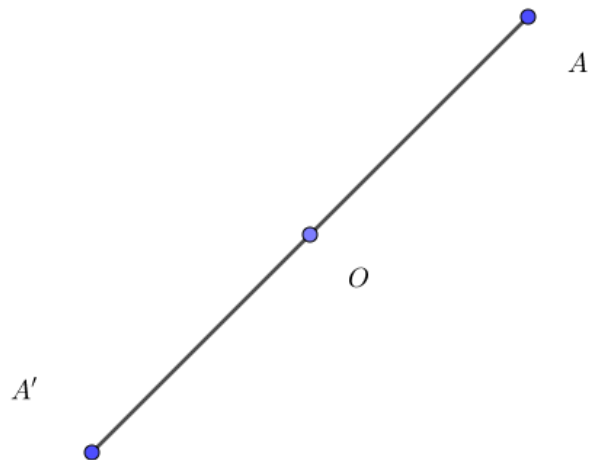
Παραδείγματα:



Σχήμα 2

Συμμετρία ως προς κέντρο

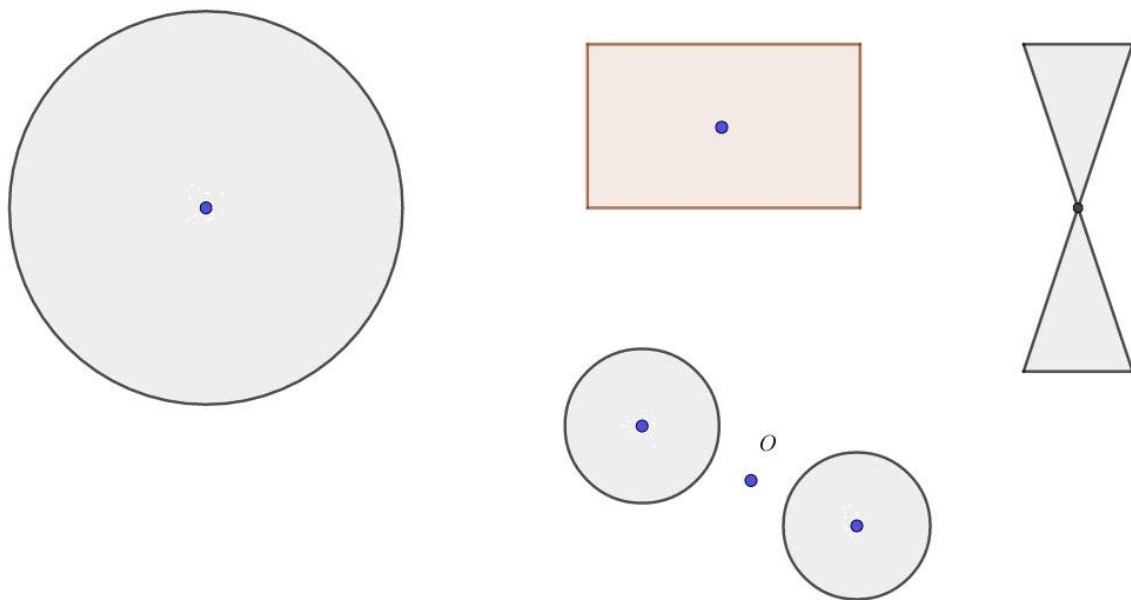
Έστω O ένα σημείο του επιπέδου το οποίο θα αποκαλούμε κέντρο. Αν A είναι ένα σημείο του επιπέδου, το συμμετρικό του A ως προς το O είναι το σημείο A' με $OA' = OA$ όπως στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3

Ένα αντικείμενο X στο επίπεδο θα λέγεται συμμετρικό ως προς το κέντρο O αν περιέχει το συμμετρικό σημείο ως προς O κάθε σημείου του. Δηλαδή αν το A είναι ένα σημείο του X , τότε το συμμετρικό σημείο A' ως προς O είναι επίσης σημείο του X .

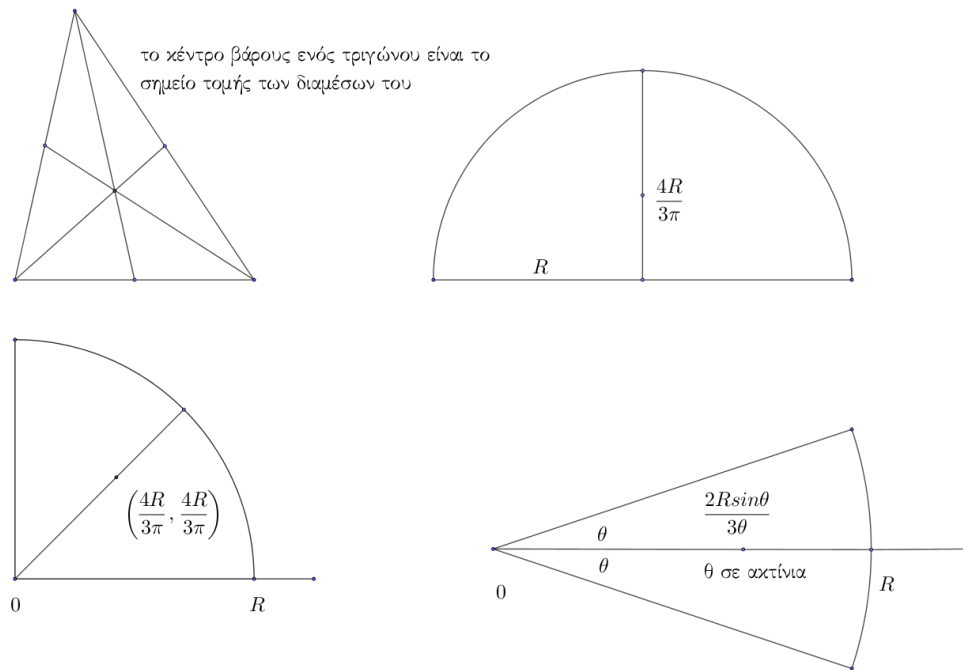
Παραδείγματα:



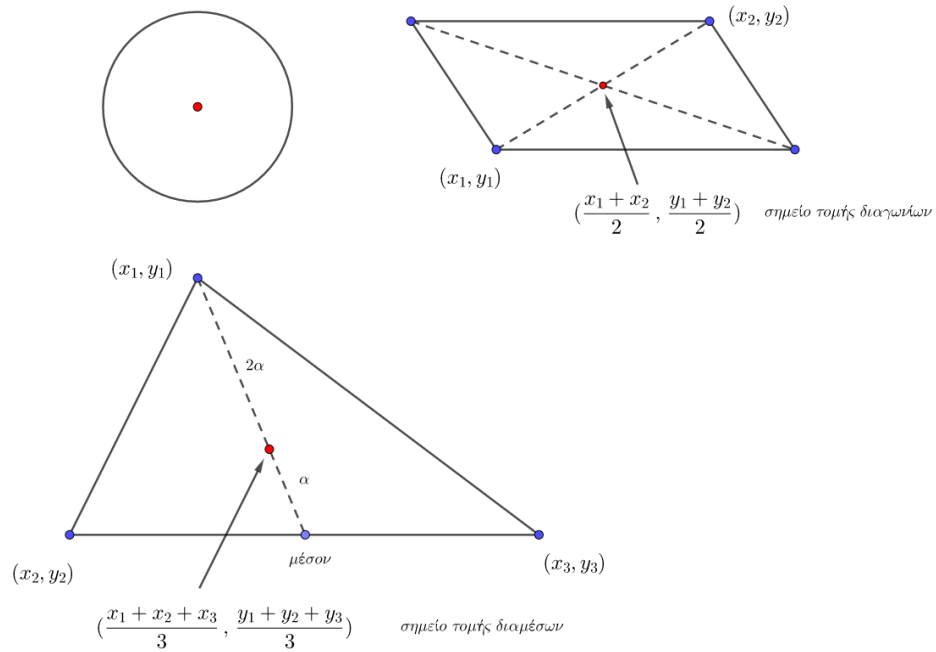
Σχήμα 4

Κέντρο βάρους επιφάνειας

Εξετάζουμε επιφάνειες/πλάκες οι οποίες είναι ομογενείς (αποτελούνται από το ίδιο υλικό και το πάχος τους δεν αλλάζει).



Σχήμα 5α



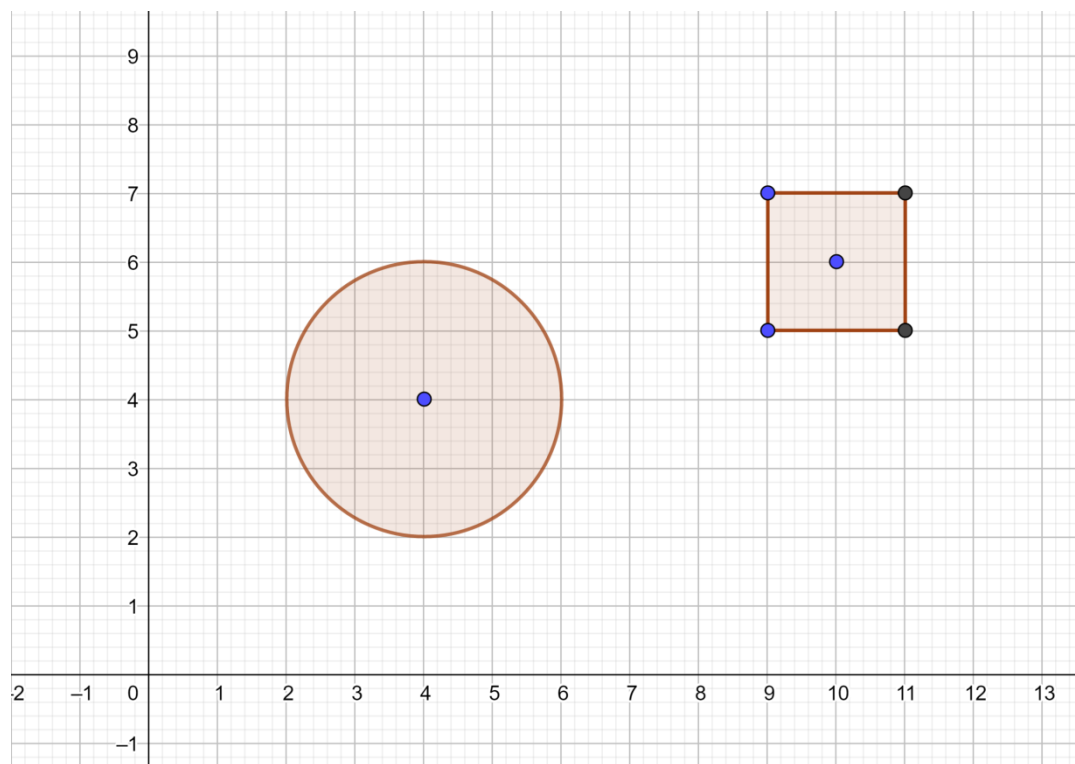
Σχήμα 5β

Όταν στο σημείο (x_1, y_1) του επιπέδου βρίσκεται μια μάζα B_1 μονάδων μάζας, στο σημείο (x_2, y_2) βρίσκεται μια μάζα B_2 μονάδων μάζας στο σημείο (x_n, y_n) βρίσκεται μια μάζα B_n μονάδων μάζας, τότε οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους $(\bar{x}, \bar{y})$ (κεντροειδούς) του συστήματος που αποτελείται από τις παραπάνω μάζες είναι

$$\bar{x} = \frac{x_1 g B_1 + x_2 g B_2 + \cdots + x_n g B_n}{g B_1 + g B_2 + \cdots + g B_n} = \frac{x_1 B_1 + x_2 B_2 + \cdots + x_n B_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}$$
$$\bar{y} = \frac{y_1 g B_1 + y_2 g B_2 + \cdots + y_n g B_n}{g B_1 + g B_2 + \cdots + g B_n} = \frac{y_1 B_1 + y_2 B_2 + \cdots + y_n B_n}{B_1 + B_2 + \cdots + B_n}.$$

(*)

Άσκηση. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 6

Παρατηρούμε ότι στο σημείο (4, 4) έχουμε μάζα (επιφάνεια) $2^2\pi=4\pi$ μονάδων και στο σημείο (10, 6) έχουμε μάζα 4 μονάδων. Απο τους τύπους (*) έχουμε

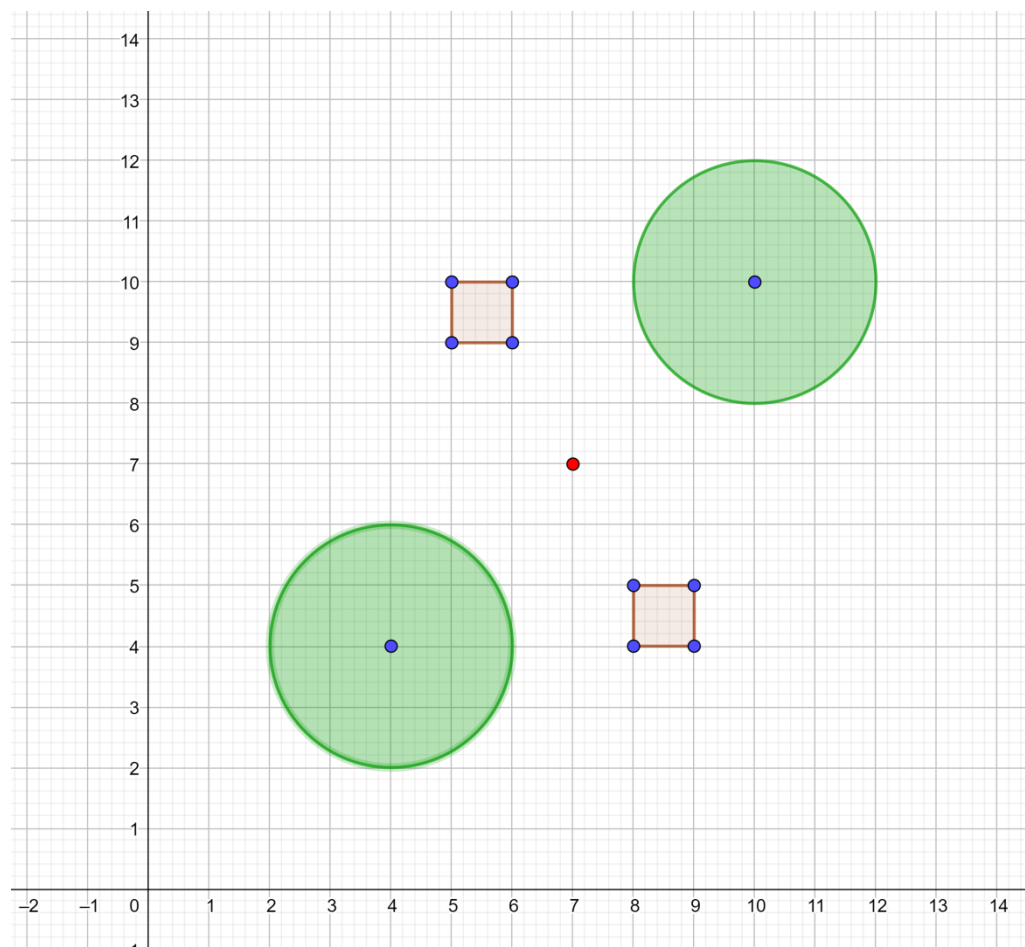
$$\bar{x} = \frac{4 \times 4\pi + 10 \times 4}{4\pi + 4} = \frac{16\pi + 40}{4\pi + 4} = \frac{4\pi + 10}{\pi + 1} \approx 5.4$$

$$\bar{y} = \frac{4 \times 4\pi + 6 \times 4}{4\pi + 4} = \frac{16\pi + 24}{4\pi + 4} = \frac{4\pi + 6}{\pi + 1} \approx 4.5.$$

Άρα το κέντρο βάρους του σχήματος είναι το σημείο (5.4, 4.5).

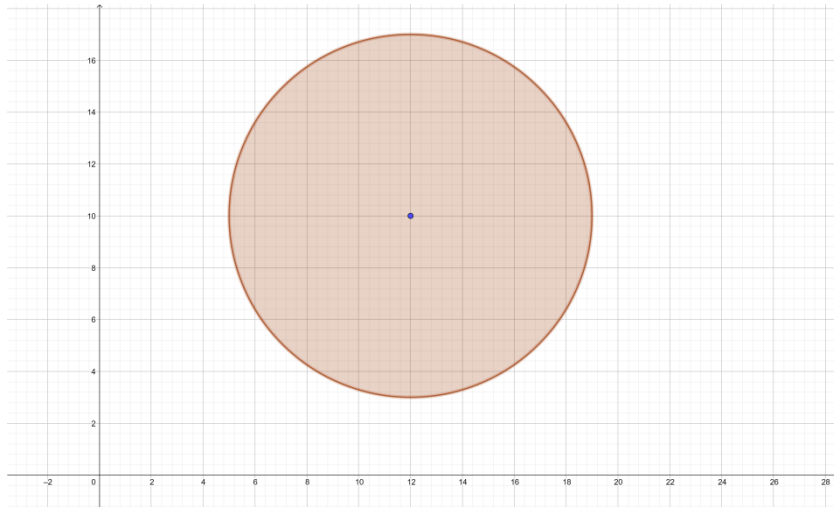
Παρατήρηση 1: Αν δύο σχήματα έχουν το ίδιο κέντρο βάρους, τότε η ένωσή τους θα έχει επίσης το ίδιο κέντρο βάρους.

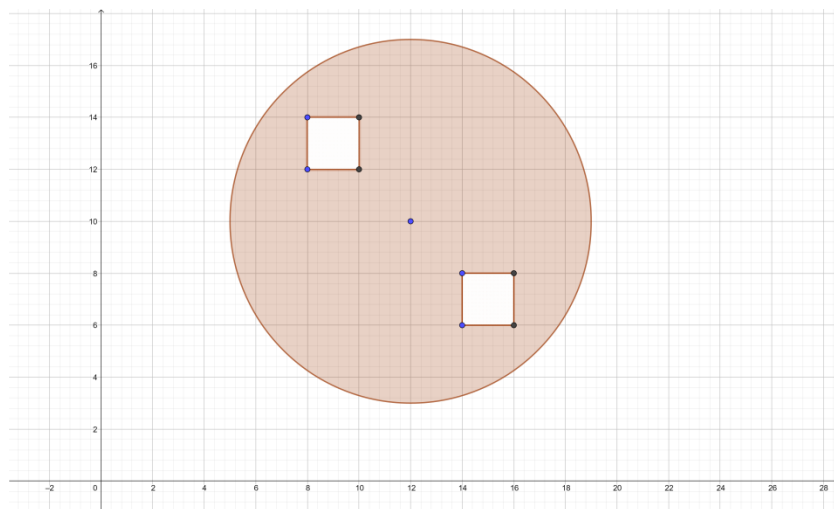
Το σχήμα που αποτελείται από τους δύο δίσκους έχει κέντρο βάρους το σημείο (7,7), όπως επίσης το σχήμα που αποτελείται από τα δυο ορθογώνια. Άρα το σχήμα που αποτελείται από τους δύο δίσκους και τα δύο ορθογώνια έχει κέντρο βάρους το ίδιο σημείο.



Σχήμα 7

Παρατήρηση 2: Το ίδιο ισχύει αν από ένα σχήμα αφαιρέσουμε ένα μέρος του το οποίο μοιράζεται με το αρχικό το ίδιο κέντρο βάρους:

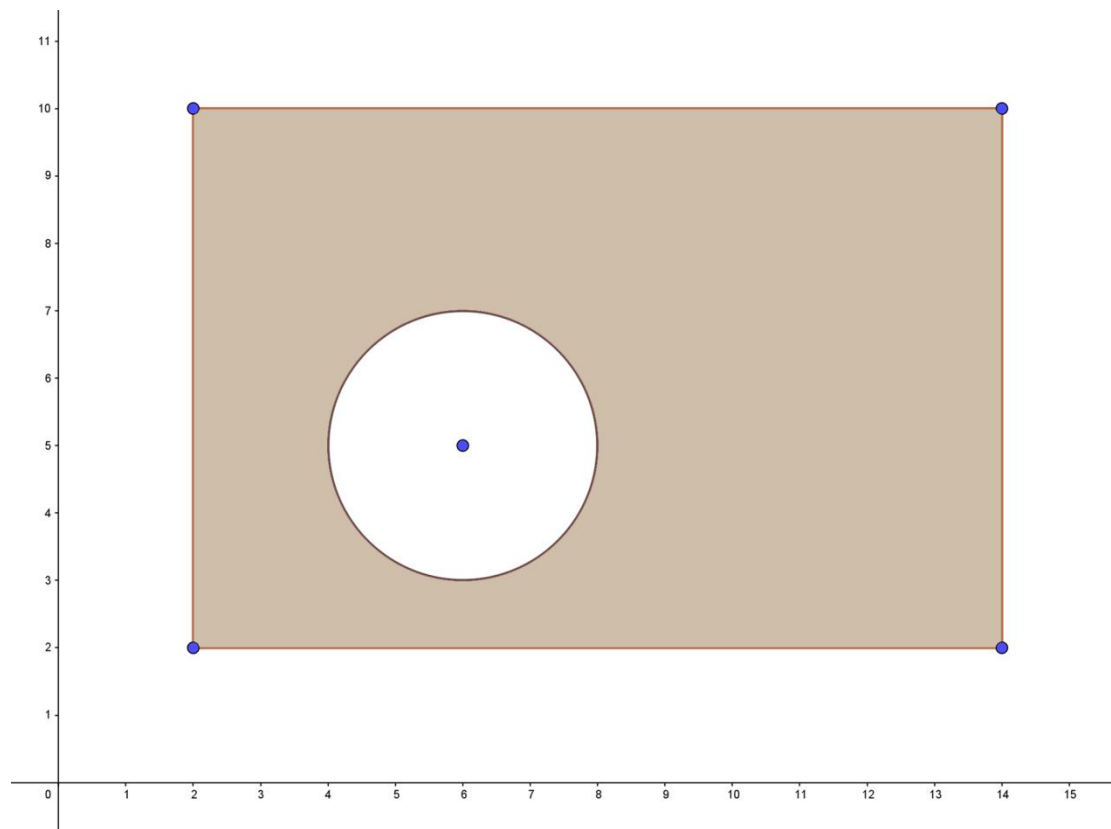




Σχήμα 8

Άσκηση

Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους του γραμμοσκιασμένου σχήματος



Σχήμα 9

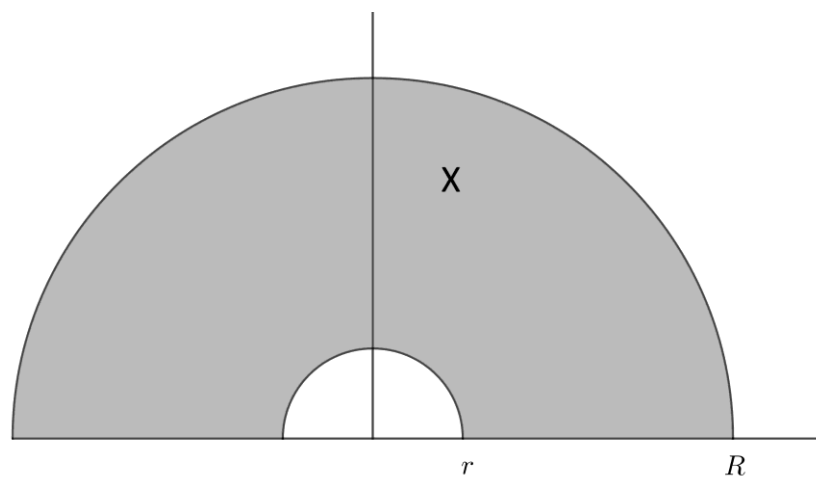
Το τετράγωνο έχει μάζα (επιφάνεια) $(14 - 2)(10 - 2) = 96$ μονάδες και κέντρο βάρους στο σημείο $(8, 6)$ και ο κύκλος έχει μάζα 4π και κέντρο βάρους στο σημείο $(6, 5)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τους τύπους (*) αλλά για τον κύκλο που δεν είναι μέρος του σχήματος θα βάλουμε αρνητικό πρόσημο στους όρους που τον αφορούν σε αριθμητή και παρονομαστή, δηλαδή

$$\bar{x} = \frac{96 \cdot 8 - 4\pi \cdot 6}{96 - 4\pi} = \frac{768 - 24\pi}{96 - 4\pi} \approx 8,3$$
$$\bar{y} = \frac{96 \cdot 6 - 4\pi \cdot 5}{96 - 4\pi} = \frac{576 - 20\pi}{96 - 4\pi} \approx 6,15$$

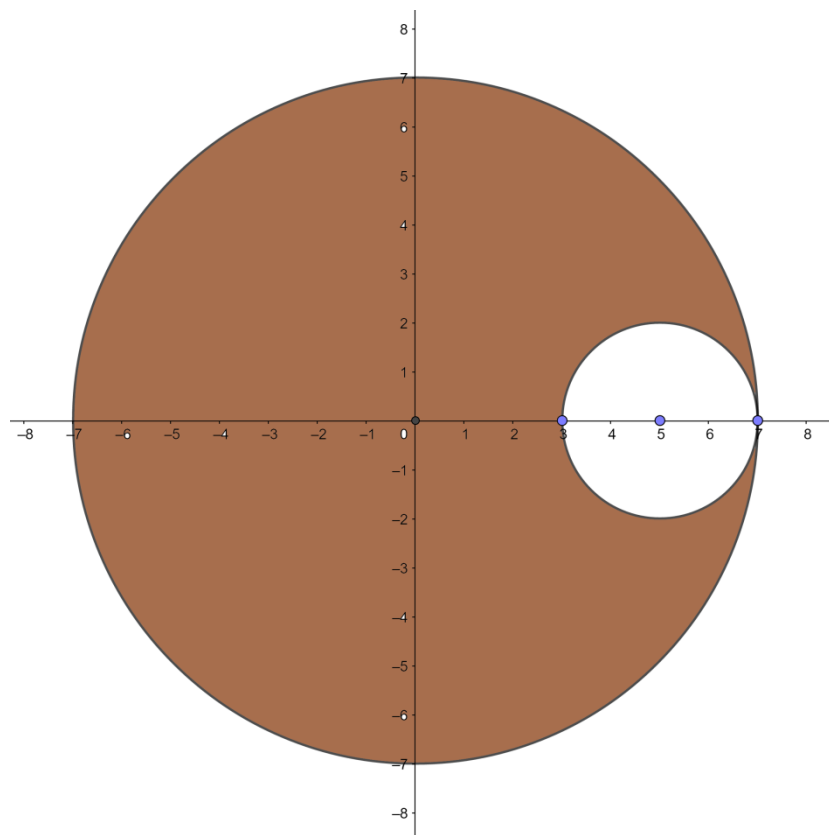
Άρα το κέντρο βάρους βρίσκεται στο σημείο $(8,3, 6,15)$.

Άσκηση. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους της παρακάτω επιφάνειας Χ.



Σχήμα 10

Άσκηση. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους του παρακάτω σχήματος



Σχήμα 11

Ασκήσεις

1. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(-1,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.
2. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους του τραπεζίου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(6,7)$, $(14,7)$, $(14,0)$.
3. Να υπολογίσετε το κέντρο βάρους της επιφάνειας η οποία αποτελείται από 3 κύκλους ακτίνας 1, 2, 3 μέτρων αντίστοιχα, με κέντρα στα σημεία $(-1,1)$, $(4,-5)$, $(-4,-6)$.

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_centroids

<https://www.efunda.com/math/solids/IndexSolid.cfm>