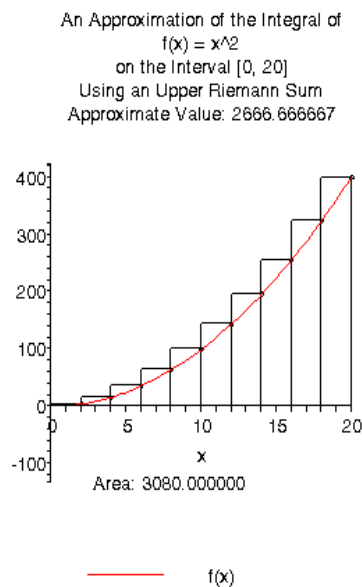
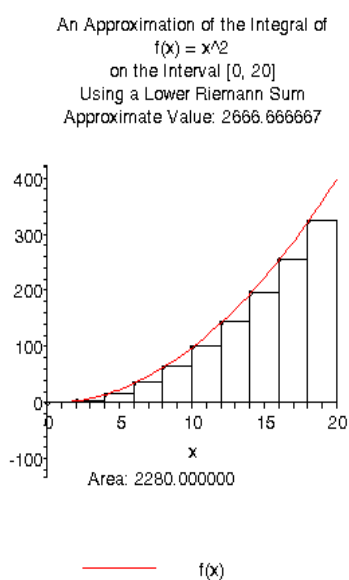


Ολοκλήρωμα συνάρτησης μιας μεταβλητής

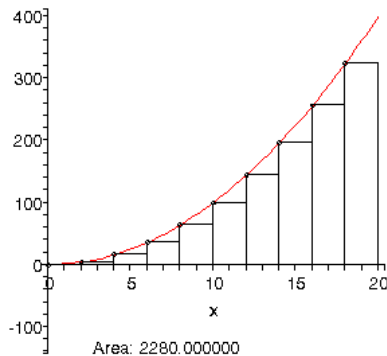
Η μέθοδος της εξάντλησης του Αρχιμήδη

Δίνεται μια μη αρνητική φραγμένη συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της συνάρτησης και του άξονα των x από το a έως το b . Η μέθοδος που θα δούμε βασίζεται στην εξής απλή ιδέα του Αρχιμήδη: τεμαχίζουμε το σχήμα σε κατακόρυφες ορθογώνιες ταινίες και παίρνουμε δύο προσεγγίσεις του εμβαδού, μια μικρότερη από αυτό και μια άλλη μεγαλύτερη από αυτό:

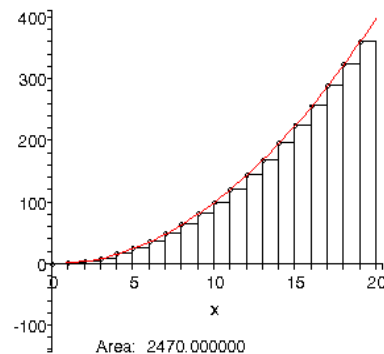


Αν αυξήσουμε το πλήθος των ταινιών - παίρνοντας έτσι μια καλύτερη προσέγγιση του εμβαδού- το μεν άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται κάτω από το γράφημα αυξάνει:

An Approximation of the Integral of
 $f(x) = x^2$
 on the Interval $[0, 20]$
 Using a Lower Riemann Sum
 Approximate Value: 2666.666667

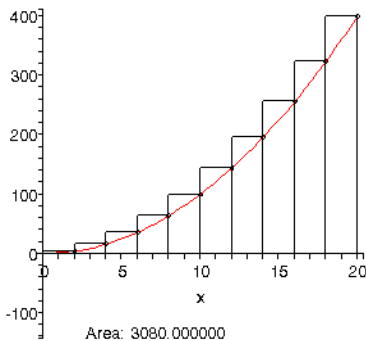


An Approximation of the Integral of
 $f(x) = x^2$
 on the Interval $[0, 20]$
 Using a Lower Riemann Sum
 Approximate Value: 2666.666667

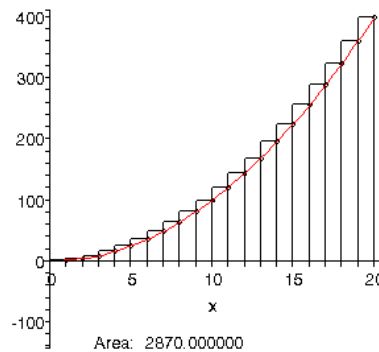


το δε άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων που βρίσκονται πάνω από το γράφημα μειούται:

An Approximation of the Integral of
 $f(x) = x^2$
 on the Interval $[0, 20]$
 Using an Upper Riemann Sum
 Approximate Value: 2666.666667



An Approximation of the Integral of
 $f(x) = x^2$
 on the Interval $[0, 20]$
 Using an Upper Riemann Sum
 Approximate Value: 2666.666667



Ο Αρχιμήδης διαπίστωσε ότι με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να προσεγγίσουμε όσο κοντά επιθυμούμε το ζητούμενο εμβαδόν, αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα αρκετά μεγάλο αριθμό ορθογωνίων. Πράγματι, έστω ότι $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[0, 20]$. Διαιρούμε το διάστημα $[0, 20]$ σε n ίσα μέρη μήκους $\frac{20}{n}$ το κάθε ένα. Έτσι έχουμε τα $n + 1$ σημεία

$$0, \frac{20}{n}, 2\frac{20}{n}, 3\frac{20}{n}, \dots, 20\frac{20}{n} = 20$$

του $[0, 20]$. Το σύνολο αυτών των σημείων ονομάζεται διαμέριση του $[0, 20]$. Με βάση κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[k \frac{20}{n}, (k+1) \frac{20}{n}\right]$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, κατασκευάζουμε δύο ορθογώνια, το ένα με ύψος $\left(k \frac{20}{n}\right)^2$ και το άλλο με ύψος $\left((k+1) \frac{20}{n}\right)^2$. Παρατηρήστε ότι το πρώτο ορθογώνιο βρίσκεται κάτω από το γράφημα και το δεύτερο πάνω από το γράφημα της $f(x) = x^2$. Το πρώτο έχει εμβαδόν $\frac{20}{n} \left(k \frac{20}{n}\right)^2$ και το δεύτερο $\frac{20}{n} \left((k+1) \frac{20}{n}\right)^2$. Το συνολικό εμβαδόν για τα πρώτα ορθογώνια είναι:

$$\begin{aligned} & \frac{20}{n} \left(0 \frac{20}{n}\right)^2 + \frac{20}{n} \left(1 \frac{20}{n}\right)^2 + \frac{20}{n} \left(2 \frac{20}{n}\right)^2 + \dots + \frac{20}{n} \left((n-1) \frac{20}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{20}{n}\right)^3 (1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = \left(\frac{20}{n}\right)^3 \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}\right) \end{aligned}$$

και για τα δεύτερα:

$$\begin{aligned} & \frac{20}{n} \left(1 \frac{20}{n}\right)^2 + \frac{20}{n} \left(2 \frac{20}{n}\right)^2 + \frac{20}{n} \left(3 \frac{20}{n}\right)^2 + \dots + \frac{20}{n} \left(n \frac{20}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{20}{n}\right)^3 (1 + 2^2 + \dots + n^2) = \left(\frac{20}{n}\right)^3 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right) \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$).

Έτσι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left(\frac{20}{n}\right)^3 \left(\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}\right) \leq \text{ζητούμενο εμβαδόν} \leq \left(\frac{20}{n}\right)^3 \left(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right).$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \rightarrow +\infty$, βλέπουμε ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι $\frac{20^3}{3}$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν σε κάθε διάστημα $[0, a]$, το αποτέλεσμα θα είναι $\frac{a^3}{3}$! Ομοίως, αν αντί της x^2 έχουμε την cx^2 , το αποτέλεσμα θα είναι $c \frac{a^3}{3}$.

Το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής φραγμένης συνάρτησης $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται ανάμεσα στον άξονα των x από το a έως το b και το γράφημα της συνάρτησης.

Το Πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού.

Έστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση

$F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ με τον τύπο

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx.$$

Θεώρημα 3. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a, b)$, τότε η F παραγωγίζεται στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$.

Το Δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού

Αν η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Ασκήσεις

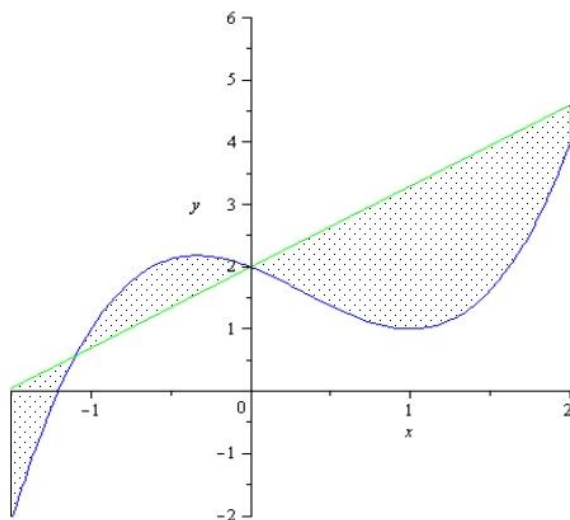
1. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα

$$\int_0^1 x^3 dx, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx, \int_0^{\pi} \cos x dx, \int_0^1 e^{2x} dx.$$

Εμβαδόν επίπεδου χωρίου

Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Το εμβαδόν της περιοχής που περικλείουν τα γραφήματά τους από το a έως το b είναι

$$E = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

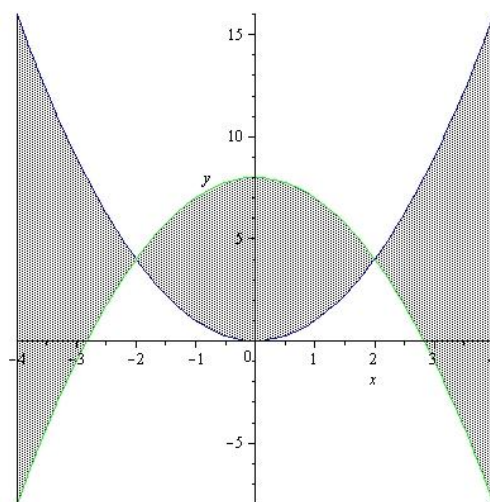


Παράδειγμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = x^3$ και του άξονα των x από το -1 έως το 1 .

Ο άξονας των x περιγράφεται από την συνάρτηση $g(x) = 0$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\int_{-1}^1 |x^3 - 0| dx = \int_{-1}^1 |x^3| dx = 2 \int_0^1 |x^3| dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Παράδειγμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των $f(x) = x^2$ και $g(x) = 8 - x^2$ από το -4 έως το 4 .

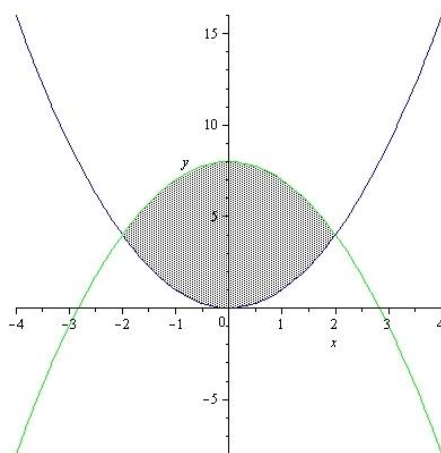


Στα σημεία τομής ισχύει $x^2 = 8 - x^2$ οπότε $x = 2$ ή $x = -2$. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{-4}^4 |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^4 |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^2 ((8 - x^2) - x^2) dx + 2 \int_2^4 (x^2 - (8 - x)^2) dx \\
 &= 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx + 2 \int_2^4 (2x^2 - 8) dx = \dots
 \end{aligned}$$

Αν δεν δίνονται όρια για το x τότε εννοείται ότι ζητείται το εμβαδόν της φραγμένης περιοχής που περικλείουν οι καμπύλες μεταξύ των σημείων τομής τους.

Παράδειγμα. Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των $f(x) = x^2$ και $g(x) = 8 - x^2$.



Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{-2}^2 |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^2 ((8 - x^2) - x^2) dx = 2 \int_0^2 (8 - 2x^2) dx = \dots$$

Άσκηση

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείουν οι καμπύλες:

α) $y = \sqrt{x}$, $y = x$ από το 0 έως το 5.

β) $y = x^2 + 5x - 4$, $y = 3x - 1$.

γ) $y = x^2 - 4$, $y = 5$.

Το μήκος μιας καμπύλης (μήκος τόξου)

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Το γράφημα

$$G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

της f θα λέγεται καμπύλη ή τόξο. Το μήκος αυτής της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Αν μια καμπύλη περιγράφεται μέσω μιας παραμέτρου $t : \sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, τότε το μήκος της δίνεται από τον τύπο

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Παράδειγμα Να υπολογισθεί το μήκος του κυκλοειδούς $\{(t - \sin t, 1 - \cos t) : 0 \leq t \leq 2\pi\}$.

Χρησιμοποιούμε τον δεύτερο τύπο:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[1 - \cos t]^2 + [\sin t]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{[1 - \cos t]^2 + [\sin t]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt$$

και τον τύπο για το ημίτονο: $\sin \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}$, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

$$L = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8.$$

Όγκος στερεών εκ περιστροφής

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση. Το στερεό που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής

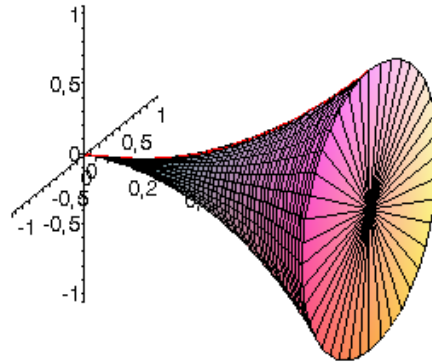
$$P = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

γύρω από τον άξονα των x έχει όγκο

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Παράδειγμα. Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής P με $f(x) = x^2$ γύρω από τον άξονα των x από το 0 έως το 1.

The Volume of Revolution Around the Horizontal Axis of
 $f(x) = x^2$
 on the Interval $[0, 1]$

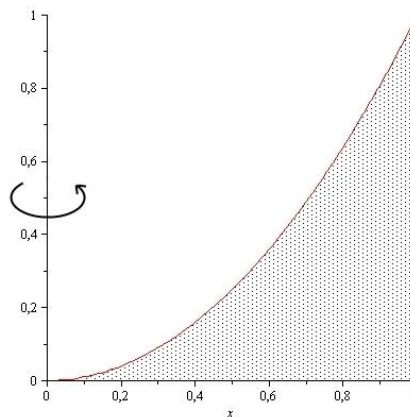


Από τον τύπο έχουμε ότι $V = \pi \int_0^1 [x^2]^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx = \pi \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{5}.$

Αν το στερεό παράγεται περιστρέφοντας την περιοχή του πρώτου τεταρτημορίου

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

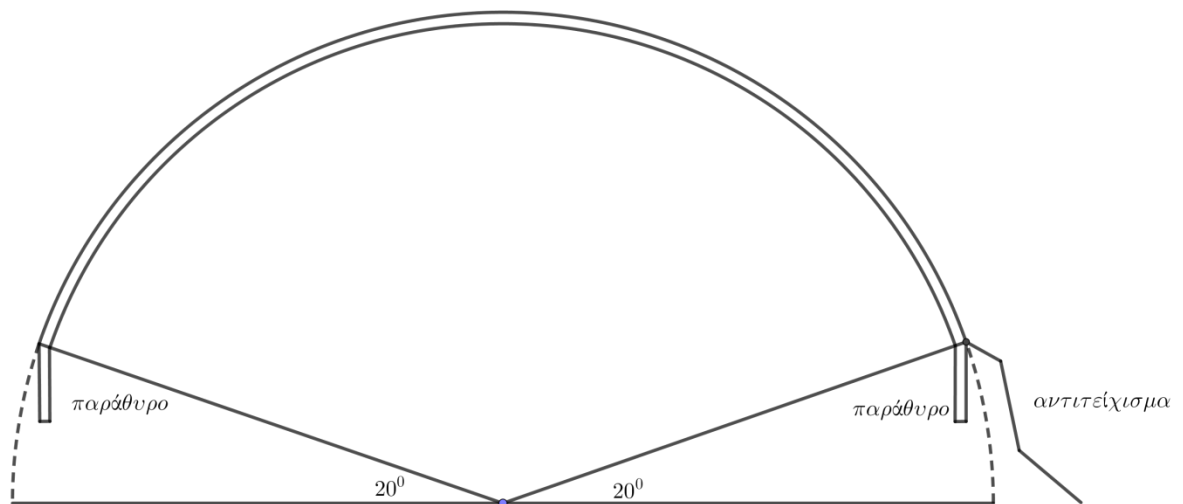
γύρω από τον άξονα των y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα,



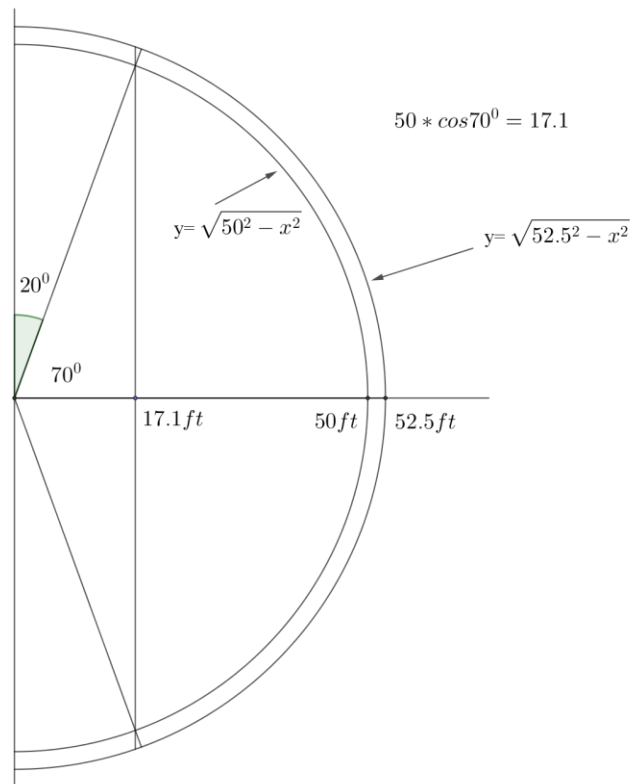
τότε ο όγκος δίνεται από τον τύπο

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

Παράδειγμα. Υπολογισμός του όγκου του τρούλου της Αγίας Σοφίας.



Δεδομένα: Ο τρούλος της Αγίας Σοφίας είναι κατασκευασμένος από τούβλα και κονίαμα και έχει πάχος 2.5 feet . Το μέσο βάρος ενός κυβικού ποδός (foot) από τούβλα και κονίαμα είναι 110 pounds . Η εξωτερική και η εσωτερική του επιφάνεια είναι σφαιρικές με ακτίνες 52.5 και 50 feet αντίστοιχα.



Ο όγκος του τρούλου είναι περίπου

$$V = \pi \int_{17.1}^{52.5} [\sqrt{52.5^2 - x^2}]^2 dx - \pi \int_{17.1}^{50} [\sqrt{50^2 - x^2}]^2 dx =$$

$$= \pi \int_{17.1}^{52.5} (52.5^2 - x^2) dx - \pi \int_{17.1}^{50} (50^2 - x^2) dx = \pi(51.004 - 42.240) = 27501 ft^3.$$

Άρα το βάρος του τρούλου είναι $27501 \times 110 = 3,025,110 \text{ pounds} \cong 1372 \text{ τόνοι}$.

Ασκήσεις

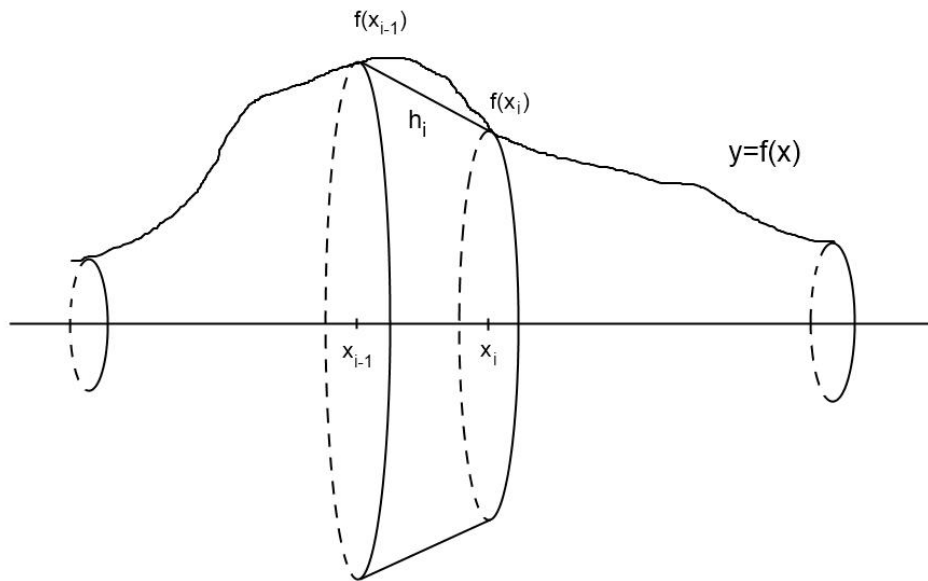
- Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής P με
 - $f(x) = \sqrt{x}$ γύρω από τον άξονα των x από το 0 έως το 1.
 - $f(x) = \sqrt{x}$ γύρω από τον άξονα των y από το 0 έως το 1.
- Να ευρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή της περιοχής $P = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$ γύρω από τον άξονα των x .

Εμβαδόν επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Περιστρέφοντας το γράφημά της

$G = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ γύρω από τον άξονα των x παράγεται μια επιφάνεια η οποία έχει εμβαδόν

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx .$$



Παράδειγμα. Έστω $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 1$, $x \in [0, 2]$. Περιστρέφοντας το γράφημά της γύρω από τον άξονα των x παίρνουμε μια επιφάνεια με εμβαδόν

$$2\pi \int_0^2 \left| \frac{1}{2}x^2 - 1 \right| \sqrt{1 + x^2} dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x^2 \right) \sqrt{1 + x^2} dx + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 1 \right) \sqrt{1 + x^2} dx = \dots$$

Παράδειγμα. Η σάλπιγγα του Γαβριήλ ή η τρομπέτα του Τορρικέλλι.

Αν περιστρέψουμε το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ γύρω από τον άξονα των x στο διάστημα $[1, +\infty)$ παίρνουμε μια επιφάνεια με εμβαδόν

$$2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = 2\pi [\log x]_1^{+\infty} = +\infty.$$

Αν περιστρέψουμε την περιοχή $C = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ γύρω από τον ίδιο άξονα θα πάρουμε ένα στερεό με όγκο

$$\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(-\frac{1}{x} \right)_1^{+\infty} = \pi.$$

Βρήκαμε ένα αντικείμενο που μπορούμε να γεμίσουμε αλλά δεν μπορούμε να βάψουμε!

Ασκήσεις

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγονται όταν περιστρέψουμε το γράφημα G όταν

α) $f(x) = x^2$ γύρω από τον άξονα των y από το $y = 1$ έως το $y = 4$.

β) $g(x) = \sqrt{x-1}$ γύρω από τον άξονα των x από το $x = 1$ έως το $x = 2$.

γ) $h(x) = \sin x$ γύρω από τον άξονα των x από το $x = 0$ έως το $x = \pi$.