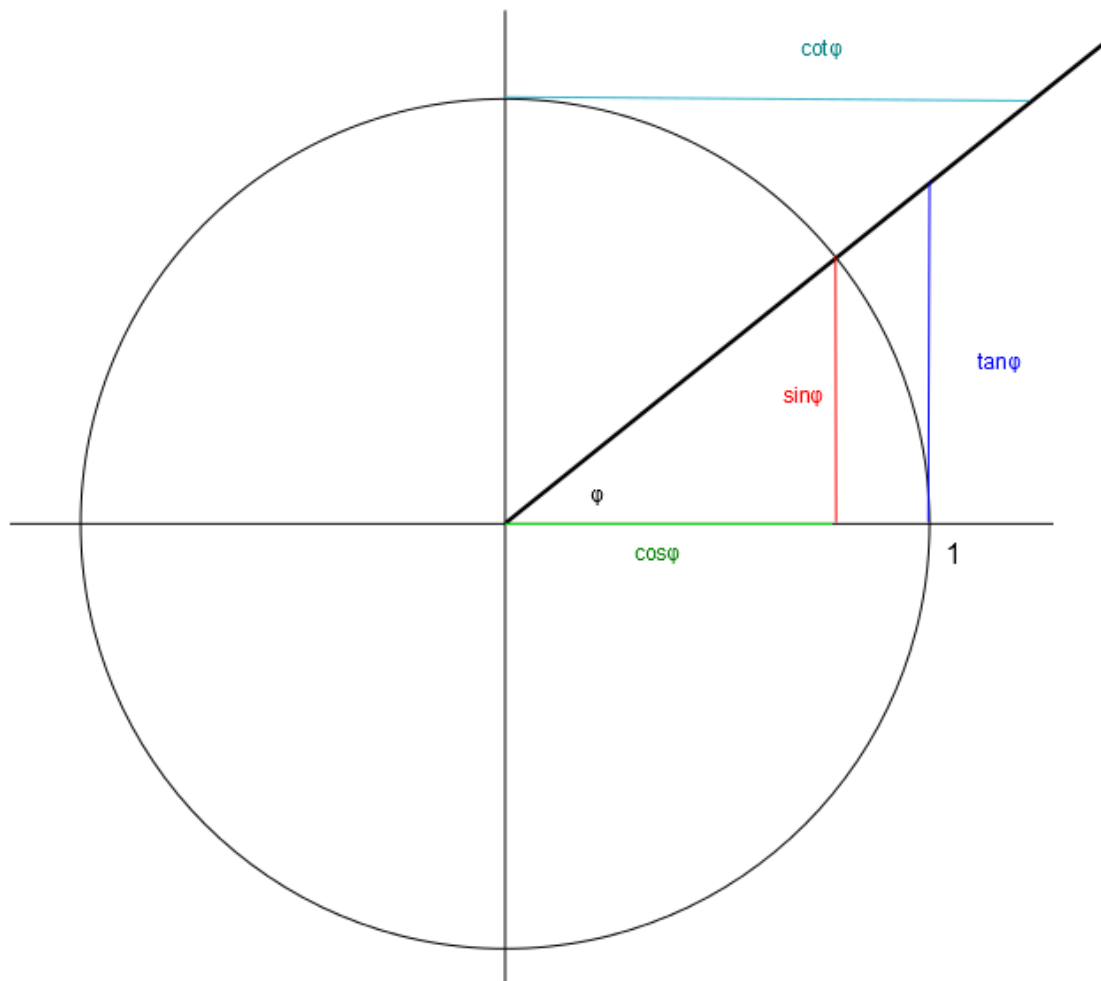


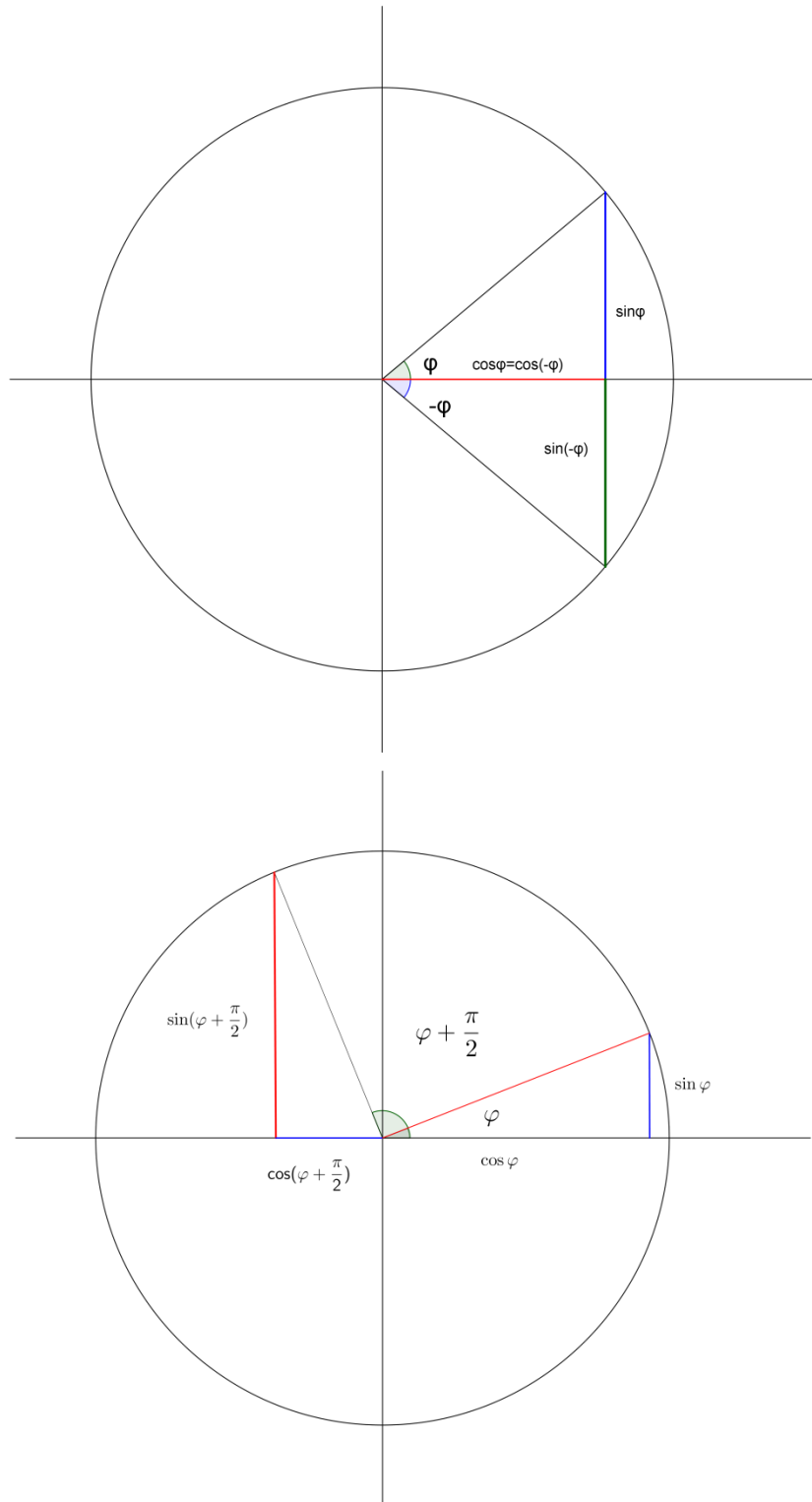
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ο τριγωνομετρικός κύκλος

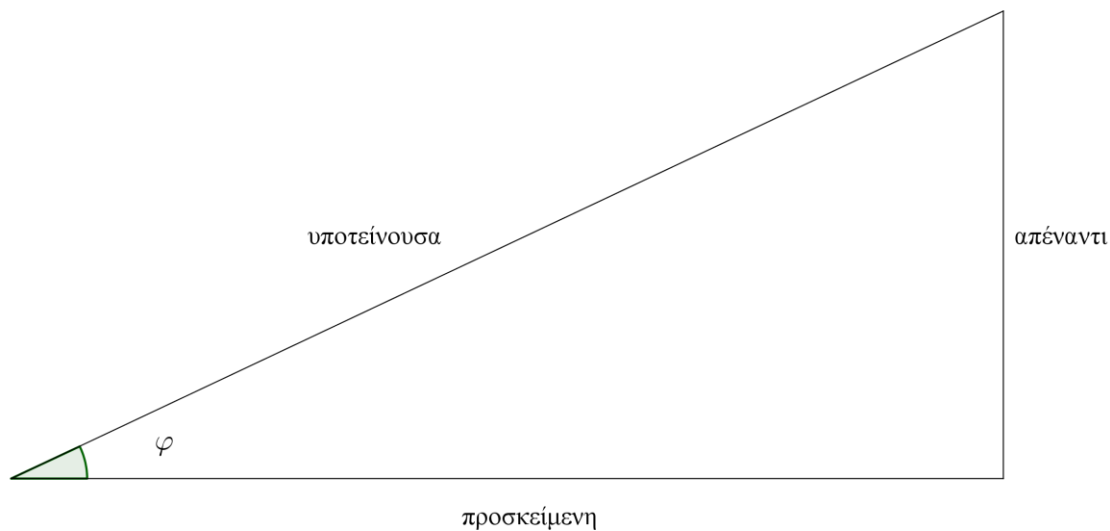


Από τα παρακάτω σχήματα έχουμε τις ισότητες

$$\sin(-\varphi) = -\sin\varphi, \quad \cos(-\varphi) = \cos\varphi, \quad \tan(-\varphi) = -\tan\varphi$$



Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε



$$\sin \varphi = \frac{\text{μήκος απέναντι}}{\text{μήκος υποτείνουσας}} \quad \cos \varphi = \frac{\text{μήκος προσκείμενης}}{\text{μήκος υποτείνουσας}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{μήκος απέναντι}}{\text{μήκος προσκείμενης}}, \quad \cot \varphi = \frac{\text{μήκος προσκείμενης}}{\text{μήκος απέναντι}}$$

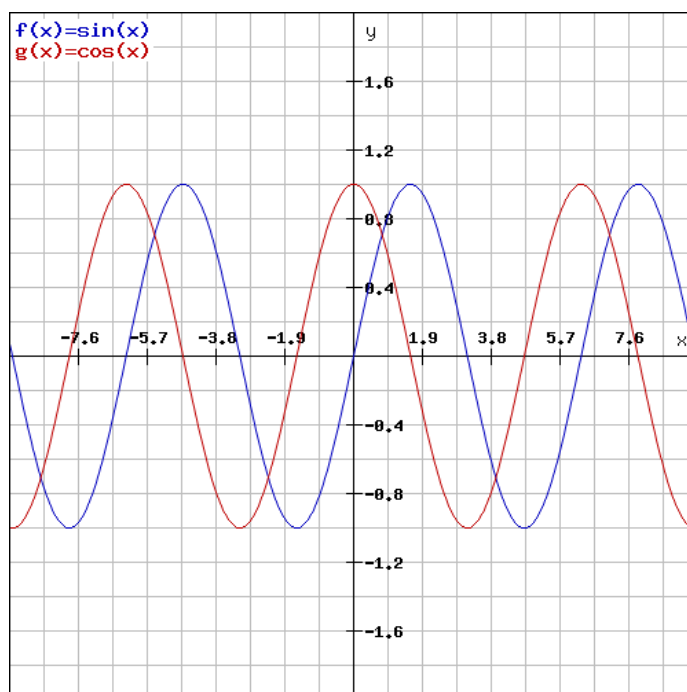
Παρατηρούμε ότι

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

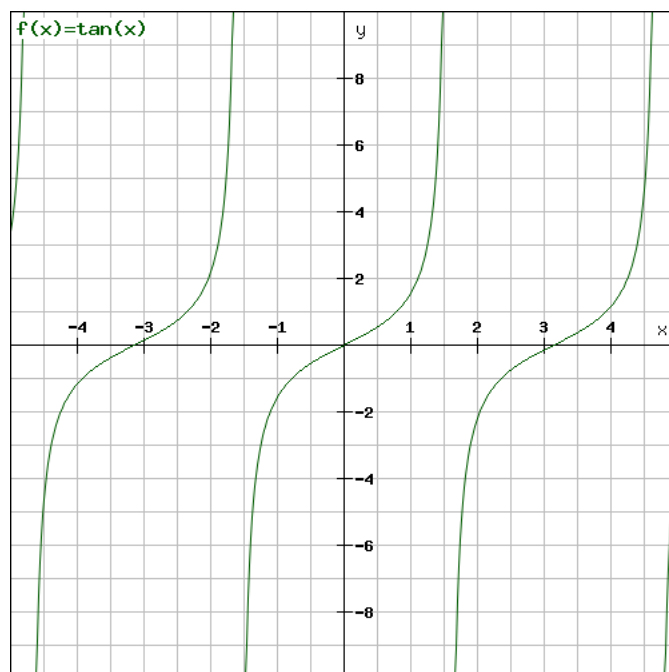
$$\tan x = \frac{1}{\cot x}, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Γραφικές παραστάσεις

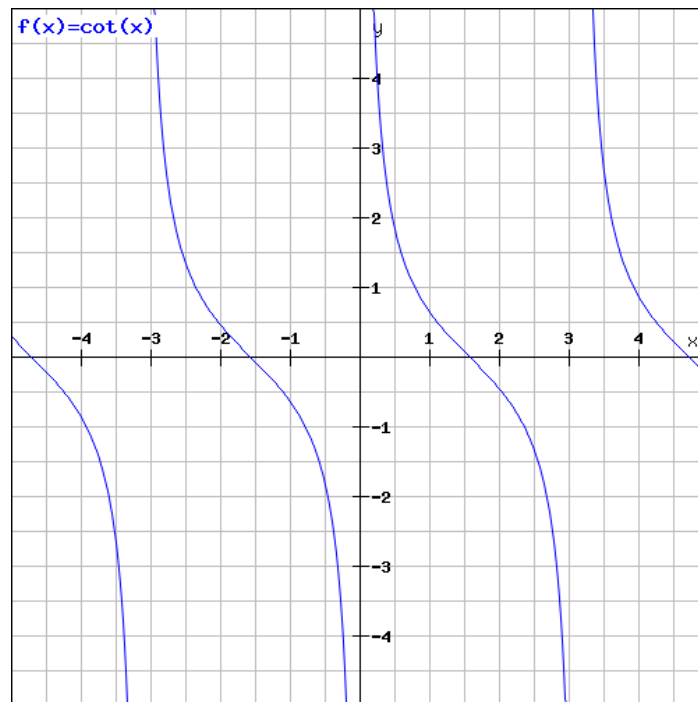
Το γράφημα του ημιτόνου είναι μπλέ και του συνημιτόνου είναι κόκκινο.



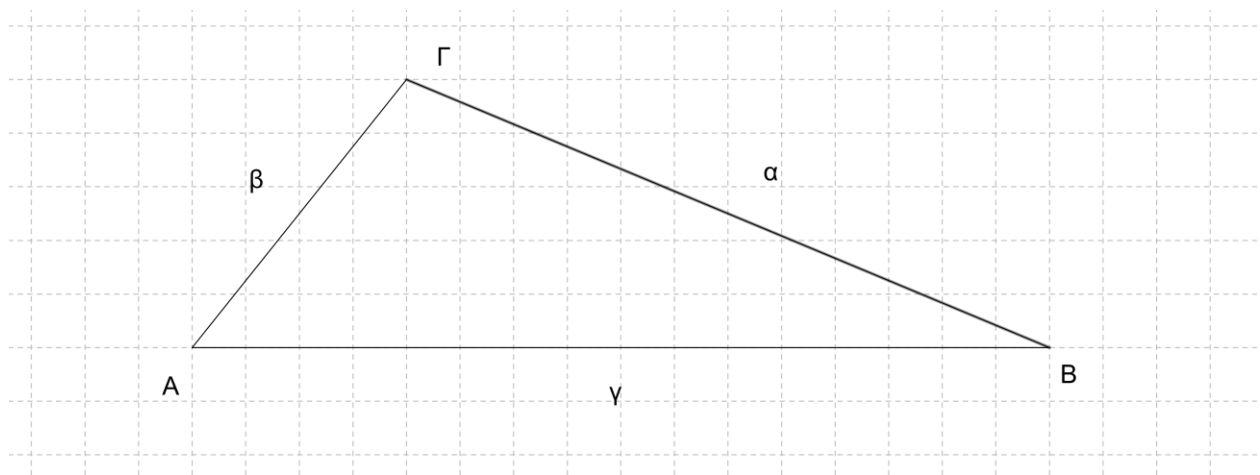
Το γράφημα της εφαπτομένης



Το γράφημα της συνεφαπτομένης



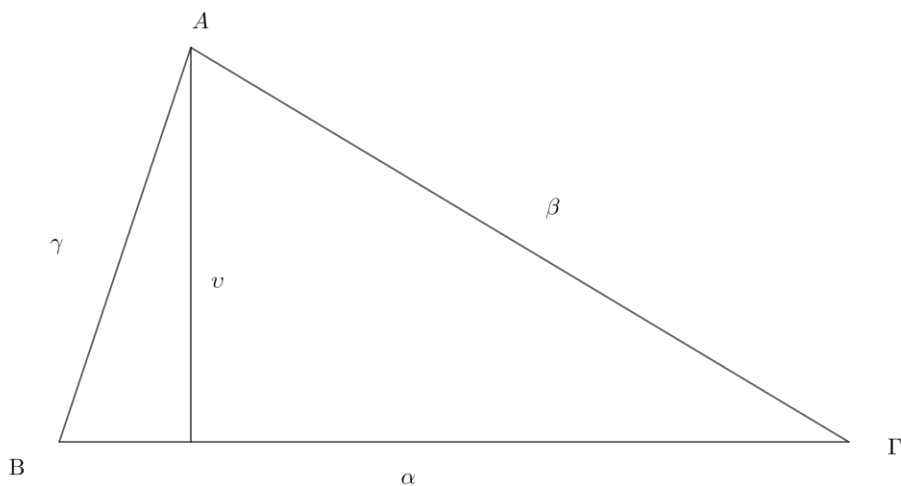
Νόμος των ημιτόνων



$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B} = \frac{\gamma}{\sin \Gamma} = 2R$$

όπου R είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

Το εμβαδόν ενός τριγώνου



Παρατηρούμε ότι $v = \gamma \sin B$, οπότε απο τον νόμο των ημιτόνων

$$E = \frac{1}{2} \alpha v = \frac{1}{2} \alpha \gamma \sin B = \frac{1}{2} \alpha \beta \sin \Gamma = \frac{1}{2} \beta \gamma \sin A = \frac{\alpha \beta \gamma}{4R}$$

Νόμος των συνημιτόνων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες.

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi$$

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi$$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi$$

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi$$

$$\tan(\varphi + \psi) = \frac{\tan \varphi + \tan \psi}{1 - \tan \varphi \tan \psi}, \quad \tan(\varphi - \psi) = \frac{\tan \varphi - \tan \psi}{1 + \tan \varphi \tan \psi}$$

Άμεση συνέπεια των προηγούμενων ταυτοτήτων είναι οι

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \sin^2 a \\ 2 \cos^2 a - 1 \\ 1 - 2 \sin^2 a, \end{cases}$$

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{2}, \quad \cos^2 \frac{a}{2} = \frac{1 + \cos a}{2}$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$$

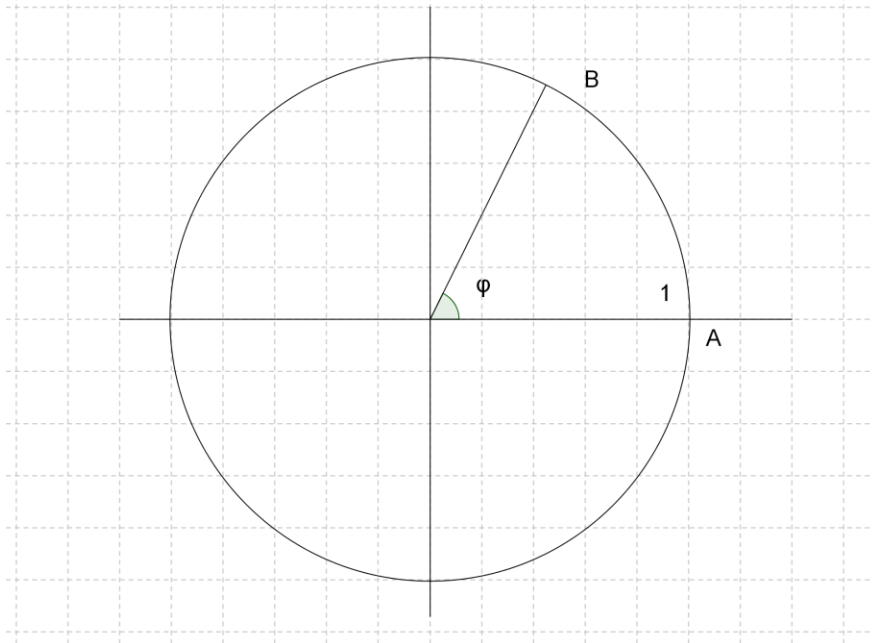
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Χρησιμοποιούμε μοίρες για να μετρήσουμε μια γωνία. Ένας άλλος τρόπος μέτρησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Στη γωνία φ αντιστοιχούμε το μήκος του τόξου AB. Θεωρούμε ότι το μήκος της περιμέτρου είναι 2π Radians οπότε στις 180 μοίρες αντιστοιχούν π Radians, στις 90 μοίρες αντιστοιχούν $\pi/2$ Radians κλπ. Στην πράξη χρησιμοποιούμε μοίρες και Radians χωρίς να το αναφέρουμε.

Ο τύπος του Ήρωνα

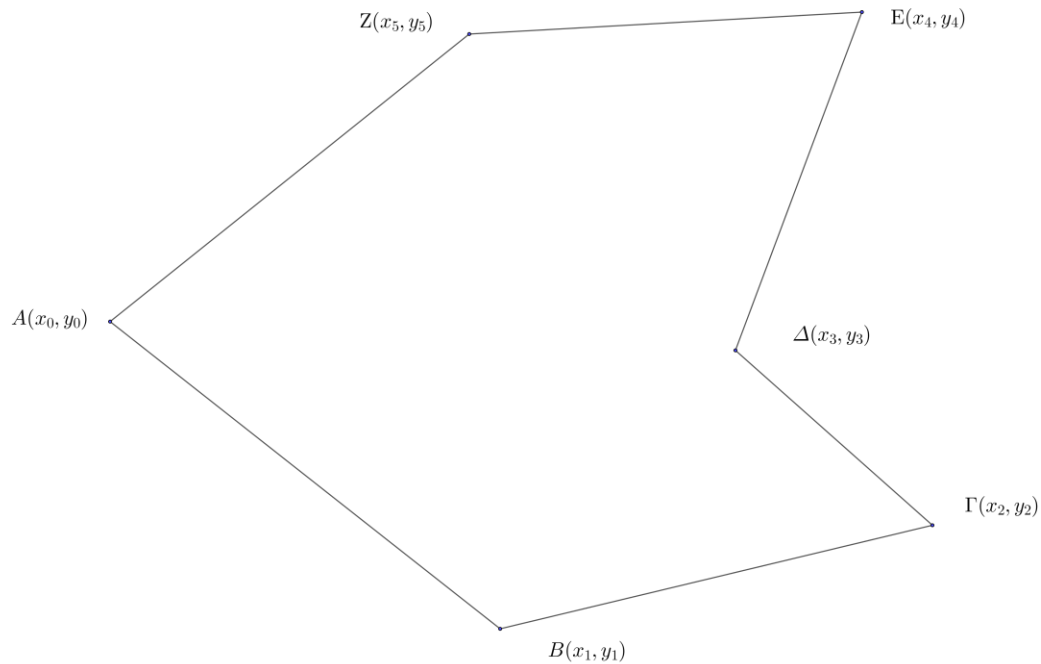
Δίνεται ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ . Το εμβαδόν του είναι

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

όπου $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$, η ημπερίμετρος του τριγώνου.

Εμβαδόν πολυγώνου

Όταν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των κορυφών ενός πολυγώνου χρησιμοποιούμε την μέθοδο των κορδονιών (shoelace method).



Διαμορφώνουμε τον παρακάτω πίνακα

Σημείο	x	y
A	x_0	y_0
B	x_1	y_1
Γ	x_2	y_2
Δ	x_3	y_3
E	x_4	y_4
Z	x_5	y_5
A	x_0	y_0

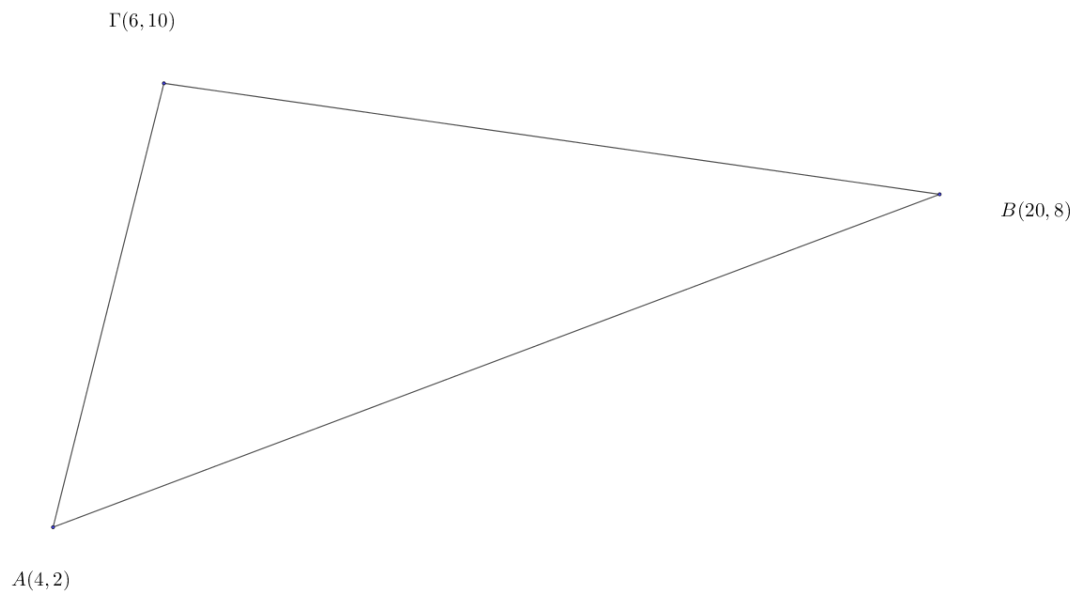
πολλαπλασιάζουμε τις συντεταγμένες ανά δύο χρησιμοποιώντας τα μαύρα βέλη, κάνουμε το ίδιο για τα κόκκινα βέλη και μετά αφαιρούμε:

$$x_0y_1 + x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_5 + x_5y_0 - x_0y_5 - x_5y_4 - x_4y_3 - x_3y_2 - x_2y_1 - x_1y_0$$

Το αποτέλεσμα είναι το διπλάσιο του εμβαδού του πολυγώνου. Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε σε κάθε πολύγωνο.

Παράδειγμα.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τριγώνου:



διαμορφώνουμε τον πίνακα

Σημείο	x	y
A	4	2
B	20	8
Γ	6	10
A	4	2

Το τρίγωνο έχει εμβαδόν

$$E = \frac{1}{2} (4 \times 8 + 20 \times 10 + 6 \times 2 - 4 \times 10 - 6 \times 8 - 20 \times 2) = 58.$$

Ασκήσεις

1. Με χρήση του κατάλληλου τριγώνου και των τύπων που έχουμε δει, να υπολογίσετε τα παρακάτω:

$$\sin 30, \cos 30, \sin 60, \cos 60, \sin 45, \cos 45, \cos \frac{\pi}{8}, \\ \sin 75, \cos 75, \sin 120, \cos 120, \sin 150, \cos 150.$$

2. Απλοποιήστε τις παραστάσεις

$$\sin(a - \frac{\pi}{2}), \cos(a - \frac{\pi}{2}), \tan(a - \frac{\pi}{2}) \\ \sin(a + \frac{\pi}{2}), \cos(a + \frac{\pi}{2}), \tan(a + \frac{\pi}{2})$$

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων με τα παρακάτω στοιχεία:

(α) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5.$

(β) $\alpha = 4.3, \beta = 2.6, \gamma = 3.8.$

(γ) $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 4.$

(δ) $\alpha = 2, \beta = 3, \Gamma = 30^\circ.$

(ε) $\alpha = 4, \beta = 3, \Gamma = 60^\circ.$

4. Βρείτε τις γωνίες των τριγώνων της προηγούμενης άσκησης καθώς και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

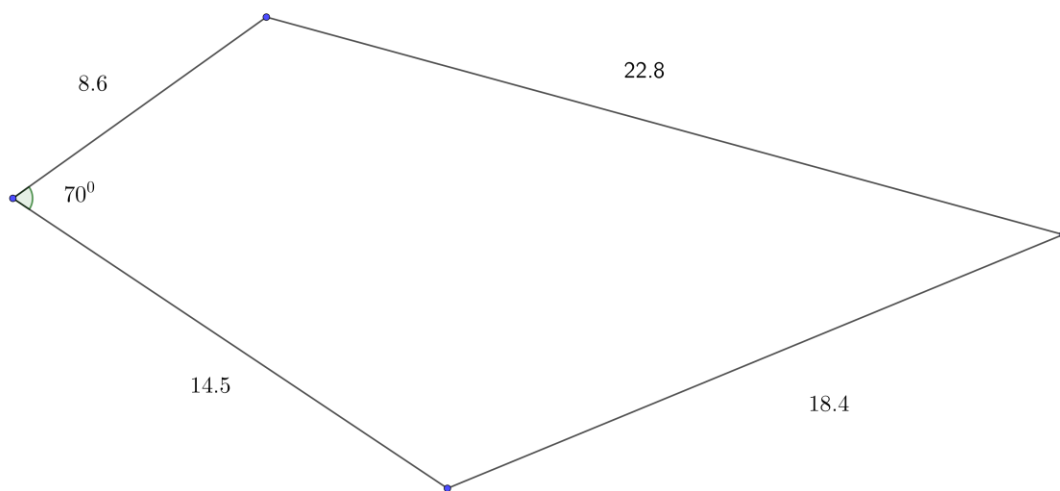
5. Υπολογίστε το εμβαδόν των τριγώνων με τα παρακάτω στοιχεία

(α) $\alpha = 5, \gamma = 4.3, B = \pi/6.$

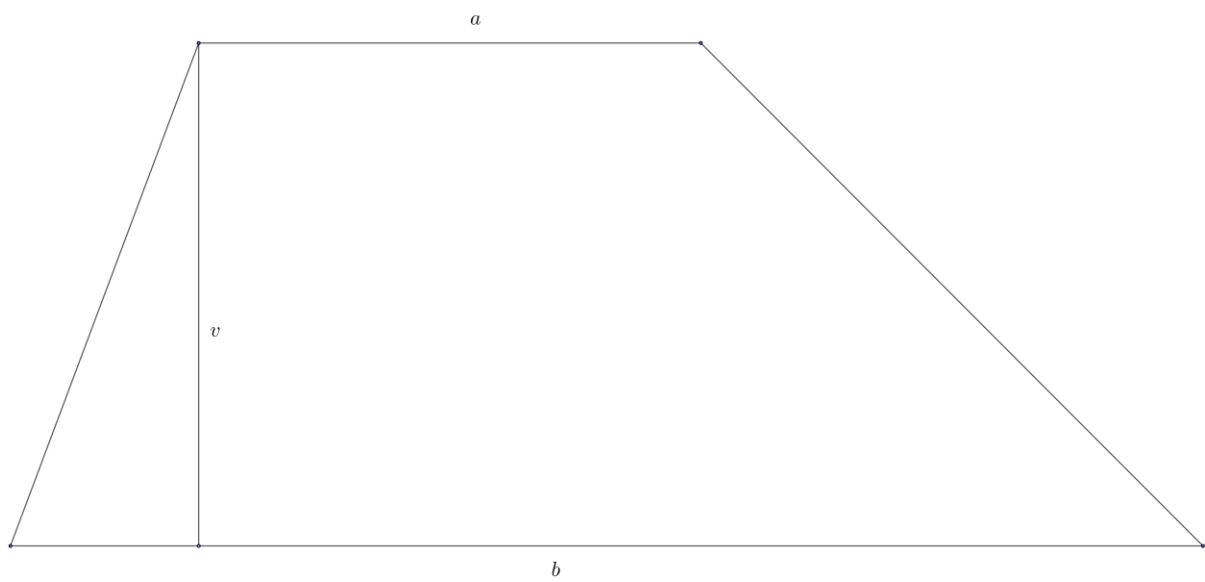
(β) $\beta = 4, \gamma = 8, A = \pi/3.$

6. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου που είναι εγγεγραμμένος σε ένα τρίγωνο.

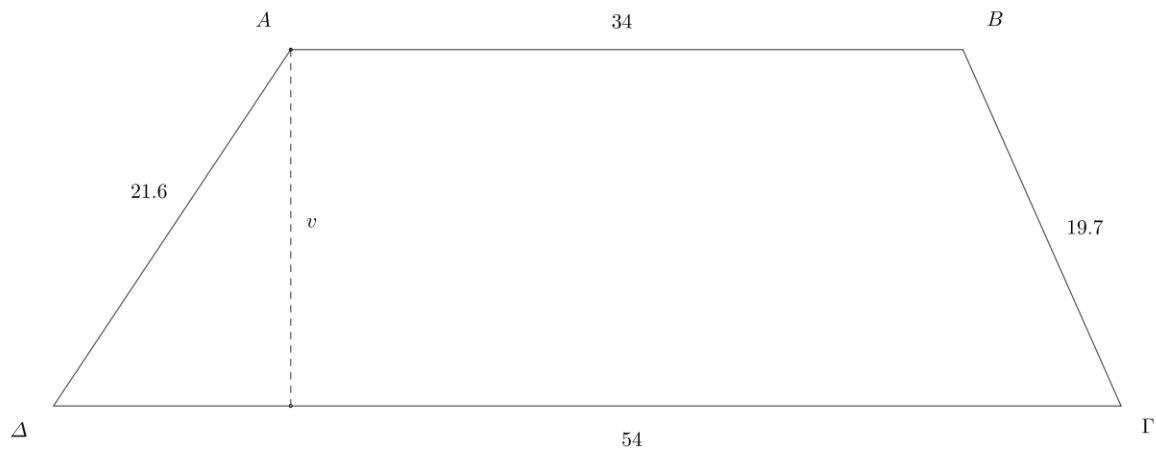
7. Βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω τετραπλεύρου



8. Να βρείτε το εμβαδόν του παρακάτω τραπεζίου:



9. Υπολογίστε το εμβαδόν του τραπεζίου:



10. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(-1, 4)$, $(-3, -1)$.