

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Θα δούμε πως επιλύεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\x - y &= 1 \\2x + y + z &= 3\end{aligned}$$

το οποίο αναπαρίσταται με πίνακες στη μορφή

$$AX = b$$

όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$

χρησιμοποιώντας την μέθοδο της απαλοιφής του Gauss. Για την διευκόλυνσή μας, το παραπάνω σύστημα θα γράφεται στην ισοδύναμη μορφή του «επαυξημένου πίνακα»

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Η μέθοδος της απαλοιφής του Gauss βασίζεται στην παρατήρηση ότι το σύστημα

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

λύνεται εύκολα με την αποκαλούμενη «προς τα πίσω αντικατάσταση». Δηλαδή η τρίτη εξίσωση, αν έχει λύση¹, δίνει το z . Γνωρίζοντας το z , υπολογίζουμε το y από την δεύτερη εξίσωση και επειδή ήδη έχουμε βρεί τα y, z , υπολογίζουμε το x από την πρώτη εξίσωση.

Παρατήρηση¹. Η τρίτη εξίσωση μπορεί να είναι, για παράδειγμα, η $0z = 1$ η οποία δεν έχει λύση.

Ένας πίνακας που έχει μηδενικά κάτω από τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

θα λέγεται «άνω τριγωνικός».

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να μετατρέψουμε ένα σύστημα ώστε να το λύσουμε με προς τα πίσω αντικατάσταση. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε τις αποδεκτές

Πράξεις μεταξύ των γραμμών του επαυξημένου πίνακα

1. Πολλαπλασιάζουμε μια γραμμή του πίνακα με μια μη μηδενική σταθερά.
2. Προσθέτουμε ένα μη μηδενικό πολλαπλάσιο μιας γραμμής του πίνακα σε μια άλλη γραμμή.
3. Εναλλάσσουμε δύο γραμμές.

Οι παραπάνω αποδεκτές πράξεις μετατρέπουν το σύστημα $(A|b)$ σε ένα άλλο σύστημα $(A'|b')$ με τα δύο συστήματα να έχουν τις ίδιες λύσεις.

Ας λύσουμε το σύστημα

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

χρησιμοποιώντας πράξεις μεταξύ των γραμμών του $(A|b)$ ώστε να μετατρέψουμε τον A σε άνω τριγωνικό.

Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην δεύτερη

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right),$$

πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στην τρίτη

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right),$$

πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 2 και την προσθέτουμε στην δεύτερη

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

εναλλάσσουμε την τρίτη και την δεύτερη γραμμή

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Από την τρίτη εξίσωση έχουμε $z=1$, από την δεύτερη $y+z=1$, οπότε $y=0$, και από την πρώτη $x+y+z=2$, οπότε $x=1$. Στην περίπτωση αυτή η λύση είναι μοναδική.

Ασκήσεις

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με την μέθοδο της απαλοιφής του Gauss

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y - z &= 5 \\ x - y - z &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y - z &= 5 \\ x + y - 2z &= 7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y - z &= 5 \\ x + y - 2z &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 0\end{aligned}$$