

Το θεώρημα των τριών καθέτων

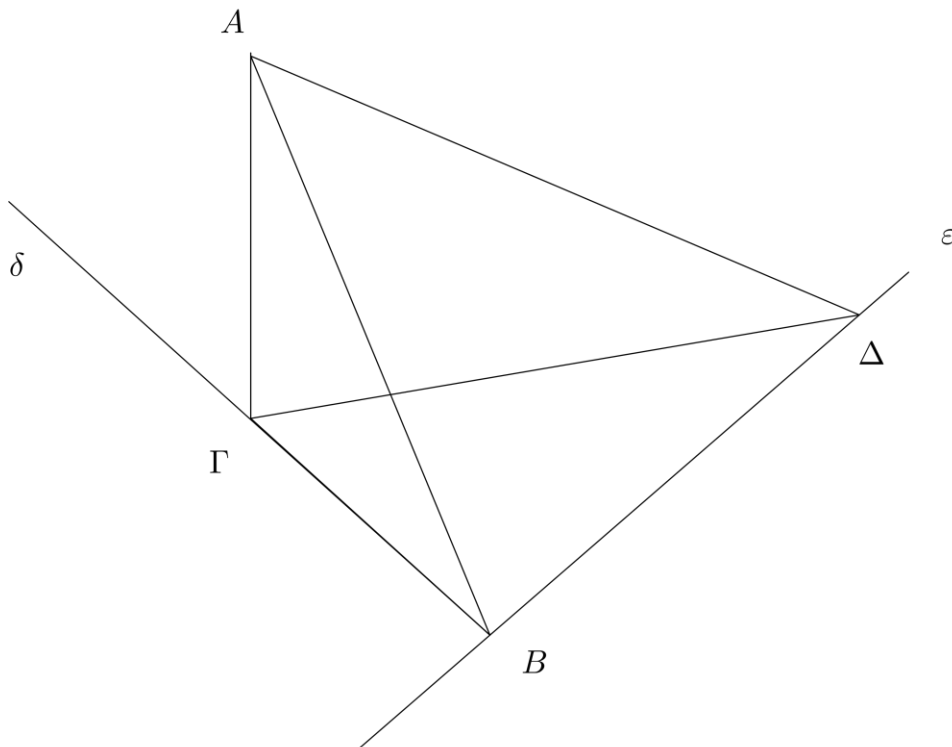
Θεωρούμε ένα επίπεδο Π και ένα σημείο A εκτός αυτού.

Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετος στο επίπεδο Π .

Προς τούτο θεωρούμε μια ευθεία ε που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο. Από το σημείο A σχεδιάζουμε μια ευθεία κάθετη στην ε η οποία την τέμνει στο σημείο B . Από το B σχεδιάζουμε μια ευθεία δ που βρίσκεται πάνω στο Π και είναι κάθετη στην ε . Η ευθεία που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην δ την τέμνει στο σημείο Γ .

Θεώρημα. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στο Π .

Θεωρούμε τυχαία ευθεία του επιπέδου η οποία διέρχεται από το Γ και τέμνει την ε στο Δ . Θα αποδείξουμε ότι η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $\Gamma\Delta$.



Από την κατασκευή, οι γωνίες $AB\Delta$, $\Gamma B\Delta$ και $A\Gamma B$ είναι ορθές οπότε τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB\Delta$ και $\Gamma B\Delta$ είναι ορθογώνια. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$$AB^2 = AG^2 + GB^2$$

$$AD^2 = AB^2 + DB^2$$

$$GD^2 = BG^2 + DB^2$$

Άρα

$$AD^2 = AB^2 + DB^2 = AG^2 + GB^2 + DB^2 = AG^2 + GD^2,$$

που σημαίνει ότι το τρίγωνο AGD είναι ορθογώνιο και η γωνία AGD είναι ορθή.

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύονται τα παρακάτω:

Αν η AG είναι κάθετη στο Π και η GB είναι κάθετη στην ε τότε η AB είναι κάθετη στην ε.

Αν η AG είναι κάθετη στο Π και η AB είναι κάθετη στην ε, τότε η GB είναι κάθετη στην ε.

Άσκηση. Θεωρούμε ένα τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ . Αν

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.