



ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

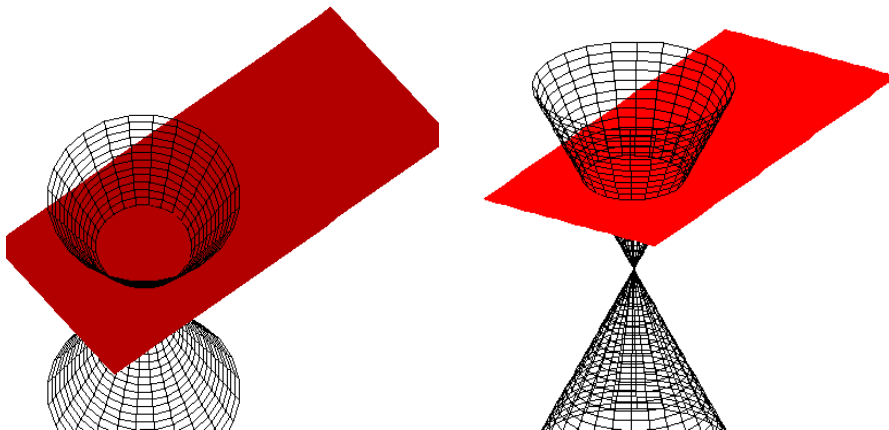
Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των κωνικών τομών που περιγράφονται από την δευτεροβάθμια εξίσωση δύο μεταβλητών

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

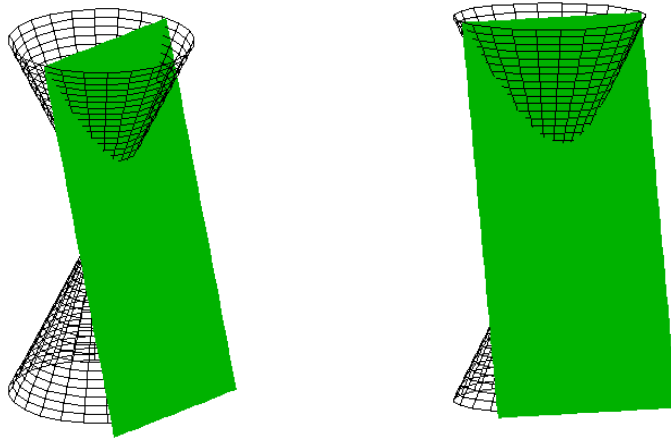
Θεωρείται ότι οι κωνικές τομές ανακαλύφθηκαν από τον Μέναιχμο c.375-325 πΧ, δάσκαλο του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Μελετήθηκαν και πήραν τα σημερινά τους ονόματα από τον Απολλώνιο c.262-190 πΧ.

Οι κωνικές τομές είναι καμπύλες που προέρχονται από την τομή ενός επιπέδου και ενός κώνου. Δείτε τα παρακάτω σχήματα.

Κύκλος

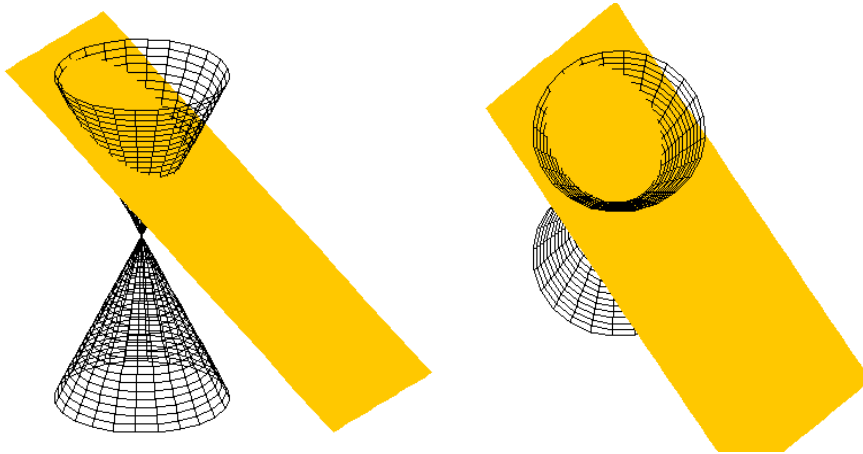


Παραβολή



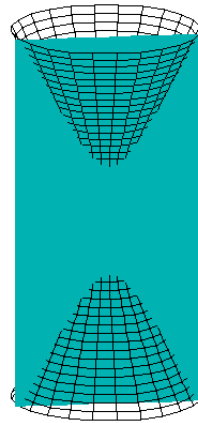
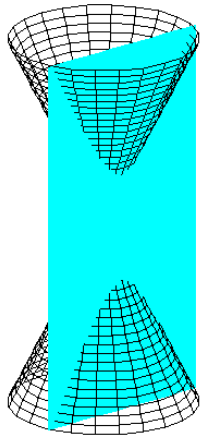
Γέφυρα Hulme Arch, Μάντσεστερ.

Έλλειψη



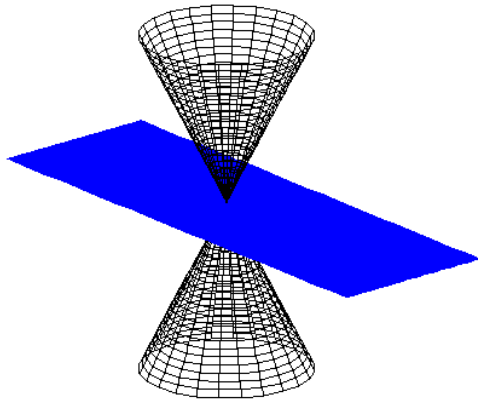
Πλανητάριο Tycho Brahe, Κοπεγχάγη.

Υπερβολή

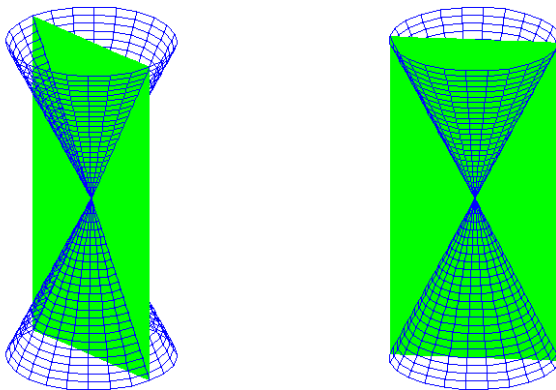


Πλανητάριο McDonnell, Saint Louis Science Center

Σημείο



Δύο ευθείες



Η Παραβολή

Ορισμός. Παραβολή ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μία ευθεία (που λέγεται διευθετούσα) και από ένα σημείο εκτός της ευθείας (που λέγεται εστία).

Ας υποθέσουμε ότι η διευθετούσα περιγράφεται από την εξίσωση $y = -p$ και η εστία είναι το σημείο $(0, p)$. Αν το σημείο (x, y) βρίσκεται στην παραβολή, τότε η απόστασή του από την εστία είναι $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$ και η απόστασή του από την διευθετούσα είναι $|y - (-p)| = |y + p|$. Θα πρέπει λοιπόν να έχουμε

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|.$$

Μετά από απλές πράξεις παίρνουμε την εξίσωση

$$x^2 = 4py,$$

η οποία περιγράφει την παραβολή με διευθετούσα την ευθεία $y = -p$ και η εστία το σημείο $(0, p)$.

Ομοίως, η παραβολή με διευθετούσα $x = -p$ και εστία $(p, 0)$ έχει εξίσωση

$$y^2 = 4px.$$

Ο άξονας συμμετρίας μιας παραβολής είναι η ευθεία που διέρχεται από την εστία της και είναι κάθετη στην διευθετούσα. Το σημείο τομής μιας παραβολής με τον άξονα συμμετρίας της λέγεται κορυφή.

Η Έλλειψη

Ορισμός. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δοσμένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερό λέγεται έλλειψη. Τα σημεία E_1 και E_2 λέγονται εστίες τις έλλειψης. Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα E_1 και E_2 λέγεται κέντρο τις έλλειψης.

Έστω ότι $E_1 = (-\varepsilon, 0)$ και $E_2 = (0, \varepsilon)$. Το σημείο (x, y) βρίσκεται σε μια έλλειψη αν η απόστασή του από το E_1 προστιθέμενη στην απόστασή του από το E_2 είναι σταθερή, έστω $2a$, με $a > \varepsilon$, δηλαδή

$$\sqrt{(x + \varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2} = 2a.$$

Μετά από τις απλές πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

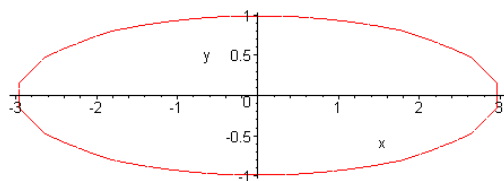
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \varepsilon^2} = 1.$$

Θέτουμε $b^2 = a^2 - \varepsilon^2 < a$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(-a, 0)$ λέγεται μεγάλος άξονας τις έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, b)$ και $(0, -b)$ λέγεται μικρός άξονας τις έλλειψης.

Η έλλειψη $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(-3, 0)$ και $(3, 0)$ είναι ο μεγάλος άξονας, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(0, 1)$ και $(0, -1)$ είναι ο μικρός άξονας, η αρχή των αξόνων είναι το κέντρο. Η σχέση $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$ δίνει $\varepsilon = \sqrt{8}$ οπότε οι εστίες είναι τα σημεία $(-\sqrt{8}, 0)$, $(\sqrt{8}, 0)$.

Η Υπερβολή

Ορισμός. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από δύο δοσμένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερή λέγεται υπερβολή. Τα σημεία E_1 και E_2 λέγονται εστίες τις υπερβολής.

Έστω ότι $E_1 = (-\varepsilon, 0)$ και $E_2 = (0, \varepsilon)$. Το σημείο (x, y) βρίσκεται στην έλλειψη αν η απόστασή του από το E_1 αφαιρούμενη από την απόστασή του από το E_2 είναι σταθερή ή αν η απόστασή του από το E_2 αφαιρούμενη από την απόστασή του από το E_1 είναι σταθερή, έστω $2a$, οπότε

$$\sqrt{(x + \varepsilon)^2 + y^2} - \sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2} = 2a, \text{ ή}$$

$$\sqrt{(x - \varepsilon)^2 + y^2} - \sqrt{(x + \varepsilon)^2 + y^2} = 2a.$$

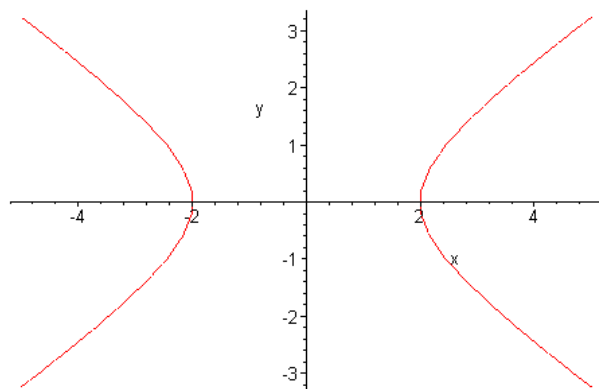
Μετά από τις απλές πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

όπου $b^2 = \varepsilon^2 - a^2$, $a < \varepsilon$.

Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα E_1 και E_2 λέγεται κέντρο τις υπερβολής. Τα σημεία $(a, 0)$ και $(-a, 0)$ λέγονται κορυφές της υπερβολής. Παρατηρείστε ότι η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα των y .

Η υπερβολή $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σύμφωνα με τα παραπάνω $\varepsilon^2 = a^2 + b^2$, οπότε $\varepsilon = \sqrt{6}$. Οι εστίες της λοιπόν είναι τα σημεία $(-\sqrt{6}, 0)$ και $(\sqrt{6}, 0)$.

Μετατοπισμένες Κωνικές Τομές

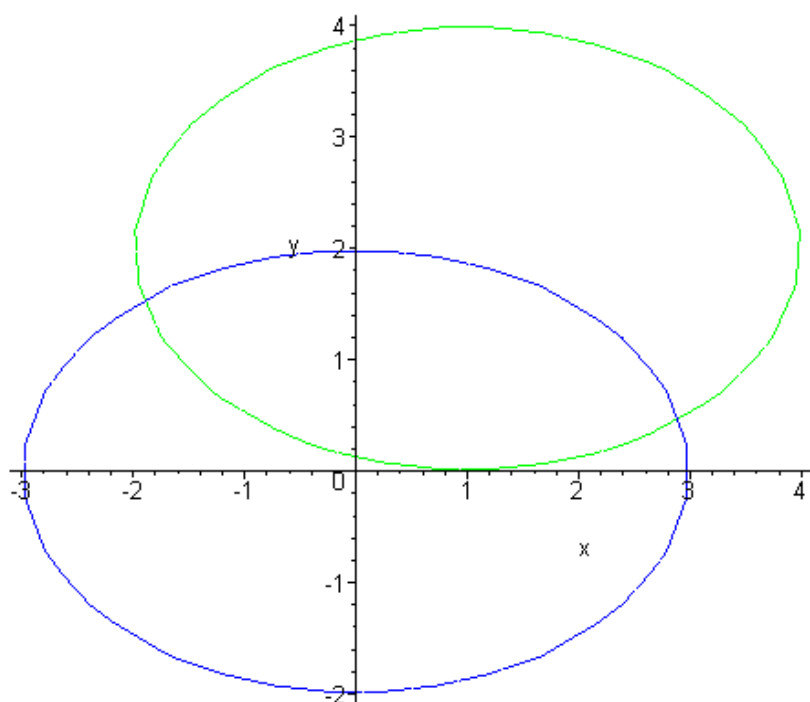
Τα περισσότερα από τα παραδείγματα των κωνικών τομών που έχουμε δει είχαν την κορυφή τους ή το κέντρο τους στο $(0, 0)$. Εδώ θα δούμε κωνικές τομές που δεν ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

Αν αντικαταστήσουμε το x στην εξίσωση μιας κωνικής τομής με το $x - d$, $d > 0$, τότε το γράφημα της κωνικής τομής μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά d μονάδες. Ομοίως, αν αντικαταστήσουμε το y με το $y - e$, $e > 0$, τότε το γράφημα της κωνικής τομής μετατοπίζεται προς τα πάνω κατά e μονάδες (κάτι που βέβαια ισχύει όχι μόνο για τις κωνικές τομές αλλά για κάθε καμπύλη).

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε την έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και αντικαθιστούμε το x με το $x-1$ και το y με το

$y-2$. Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση η έλλειψη θα μετατοπιστεί κατά το διάνυσμα $(1, 2)$.



Θεωρούμε τώρα την εξίσωση

$$4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y = 68.$$

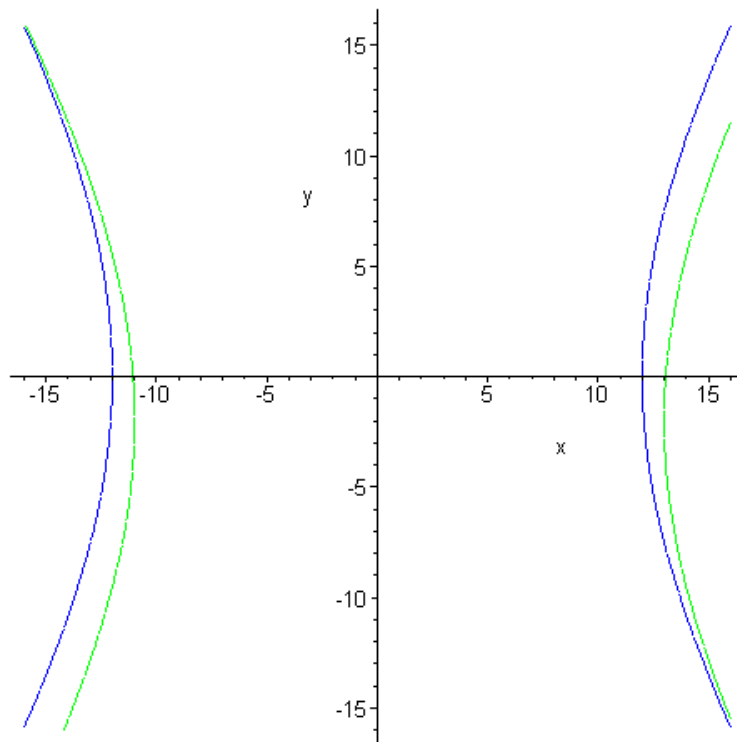
Θέλουμε να βρούμε ποια κωνική τομή περιγράφει.
Συμπληρώνομε τα τετράγωνα

$$\begin{aligned} 4(x^2 - 2x) - 9(y^2 + 4y) &= 68 \\ \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 4 - 9(y^2 + 4y + 4) + 36 &= 68 \\ \Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y+2)^2 &= 36 \\ \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} &= 36 \end{aligned}$$

η οποία είναι η εξίσωση της υπερβολής

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 36$$

που έχει μετατοπιστεί κατά το διάνυσμα (1, -2).



Στροφή των αξόνων

Οι εξισώσεις που έχουμε χειριστεί ως τώρα έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό: δεν περιέχουν τον όρο xy (ή ο συντελεστής του όρου xy είναι το μηδέν). Θα δούμε ότι όταν ο όρος xy εμφανίζεται στην εξίσωση μιας κωνικής τομής, τότε με μια κατάλληλη στροφή των αξόνων μπορούμε να τον απαλείψουμε.

Υποθέτουμε ότι στρέφουμε τους άξονες των x, y κατά μια οξεία γωνία φ και παίρνουμε τους άξονες X, Y . Έστω ότι το σημείο P με συντεταγμένες (x, y) ως προς τους αρχικούς άξονες x, y έχει συντεταγμένες (X, Y) ως προς τους νέους άξονες X, Y . Έστω r η απόσταση του P από την αρχή O των αξόνων και θ η γωνία μεταξύ του ευθύγραμμου τμήματος OP και του άξονα των X . Τότε

$$X = r \cos \theta, \quad Y = r \sin \theta$$

$$x = r \cos(\varphi + \theta), \quad y = r \sin(\varphi + \theta).$$

Από αυτές τις σχέσεις εύκολα συνάγουμε ότι

$$x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \quad y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi \quad (*)$$

ή, ισοδύναμα,

$$X = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad Y = -x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Πρόβλημα 1: αν οι άξονες στραφούν κατά γωνία 30° , ποιες θα είναι οι συντεταγμένες του σημείου $(1,3)$ ως προς τους νέους άξονες;

Σύμφωνα με τα παραπάνω $\varphi = \pi/6$, $x = 1$ και $y = 3$. Άρα οι νέες συντεταγμένες (X, Y) θα είναι οι

$$X = \cos \frac{\pi}{6} + 3 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

$$Y = -\sin \frac{\pi}{6} + 3 \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{2}$$

Πρόβλημα 2: Περιστρέφουμε τους άξονες κατά 45° . Ποια θα είναι μορφή της εξίσωσης $xy = 1/2$ ως προς τους νέους άξονες;

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (*)

$$x = X \cos \frac{\pi}{4} - Y \sin \frac{\pi}{4} = X \frac{1}{\sqrt{2}} - Y \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$y = X \sin \frac{\pi}{4} + Y \cos \frac{\pi}{4} = X \frac{1}{\sqrt{2}} + Y \frac{1}{\sqrt{2}},$$

άρα

$$\left(X \frac{1}{\sqrt{2}} - Y \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(X \frac{1}{\sqrt{2}} + Y \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}$$

οπότε η εξίσωση $xy = 1$ μετασχηματίζεται στην $X^2 - Y^2 = 1$ που περιγράφει μια υπερβολή.

Θα δούμε τώρα ότι μπορούμε, με κατάλληλη στροφή των αξόνων, να απαλείψουμε τον όρο που περιέχει το xy από την εξίσωση $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$.

Πράγματι, αν στρέψουμε κατά γωνία φ τους άξονες, από τις εξισώσεις (*) έχουμε

$$a(X \cos \varphi - Y \sin \varphi)^2 + b(X \cos \varphi - Y \sin \varphi)(X \sin \varphi + Y \cos \varphi)$$

$$+ c(X \sin \varphi + Y \cos \varphi)^2 + d(X \cos \varphi - Y \sin \varphi) + e(X \sin \varphi + Y \cos \varphi) + f = 0,$$

από την οποία, μετά από πράξεις, παίρνουμε

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

όπου $B = 2(c - a) \sin \varphi \cos j + B(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$. Εύκολα βλέπομε ότι αν η φ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\cot 2\varphi = \frac{a - c}{b}, \quad (**)$$

τότε $B=0$. Αν λοιπόν στρέψομε τους άξονες κατά φ , τότε η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μια άλλη στην οποία δεν εμφανίζεται ο όρος xy . Αυτή όμως μπορεί να μελετηθεί επειδή είναι μια μετατοπισμένη κωνική τομή.

Πρόβλημα 3: Να χαρακτηριστεί η κωνική τομή

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - x = \frac{1}{2}. \quad (***)$$

Η εξίσωση (**) δίνει $\cot 2\varphi = \frac{2-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, οπότε $2\varphi = \frac{\pi}{3}$ ή $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις (*)

$$x = X \cos \frac{\pi}{6} - Y \sin \frac{\pi}{6} = X \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \frac{1}{2},$$

$$y = X \sin \frac{\pi}{6} + Y \cos \frac{\pi}{6} = X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Από την (***) έχομε

$$2 \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \frac{1}{2} \right)^2 + \sqrt{3} \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \frac{1}{2} \right) \left(X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left(X \frac{1}{2} + Y \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(X \frac{\sqrt{3}}{2} - Y \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Μετά από πράξεις καταλήγομε στην

$$5X^2 + Y^2 - \sqrt{3}X + Y = 1.$$

Ολοκληρώνομε τα τετράγωνα

$$5 \left[X^2 + 2 \frac{\sqrt{3}}{10} X + \left(\frac{\sqrt{3}}{10} \right)^2 \right] + \left[Y^2 + 2 \frac{1}{2} Y + \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] = 1 + 5 \left(\frac{\sqrt{3}}{10} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2,$$

άρα

$$5\left(X + \frac{\sqrt{3}}{10}\right)^2 + \left(Y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{5}.$$

Αν μετατοπίσουμε την παραπάνω κωνική τομή κατά $\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}, -\frac{1}{2}\right)$, θα πάρουμε την

$$5X^2 + Y^2 = \frac{7}{5} \quad \text{ή την} \quad \frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{25}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{\frac{7}{5}}\right)^2} = 1, \text{ η οποία περιγράφει μια έλλειψη } L \text{ με}$$

κέντρο την αρχή των αξόνων.

Αν λοιπόν πάρουμε την έλλειψη L , την μετατοπίσουμε κατά $\left(-\frac{\sqrt{3}}{10}, -\frac{1}{2}\right)$ και την

στρέψουμε κατά 30° , τότε θα πάρουμε μια έλλειψη η οποία θα περιγράφεται από την εξίσωση (**).

Η εξίσωση μιας κωνικής τομής την χαρακτηρίζει σύμφωνα με τα παρακάτω:

Αν $b^2 - 4ac < 0$ τότε η κωνική τομή είναι μια **έλλειψη**,

αν $b^2 - 4ac = 0$ τότε η κωνική τομή είναι μια **παραβολή**,

αν $b^2 - 4ac > 0$ τότε η κωνική τομή είναι μια **υπερβολή**,

αν $a = c \neq 0$ και $b = 0$, τότε η κωνική τομή είναι ένας **κύκλος**.

Without mathematics there is no art

Luca Pacioli