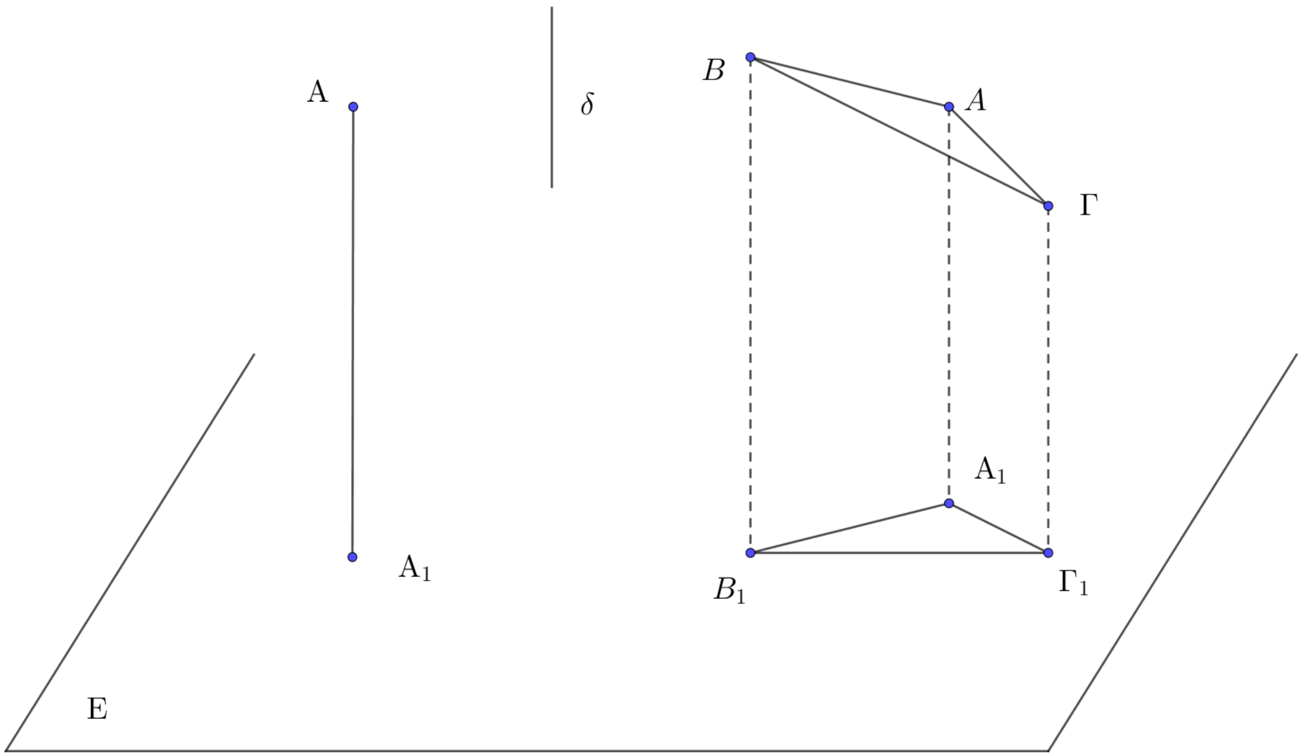
Αξονομετρία

Παράλληλη προβολή

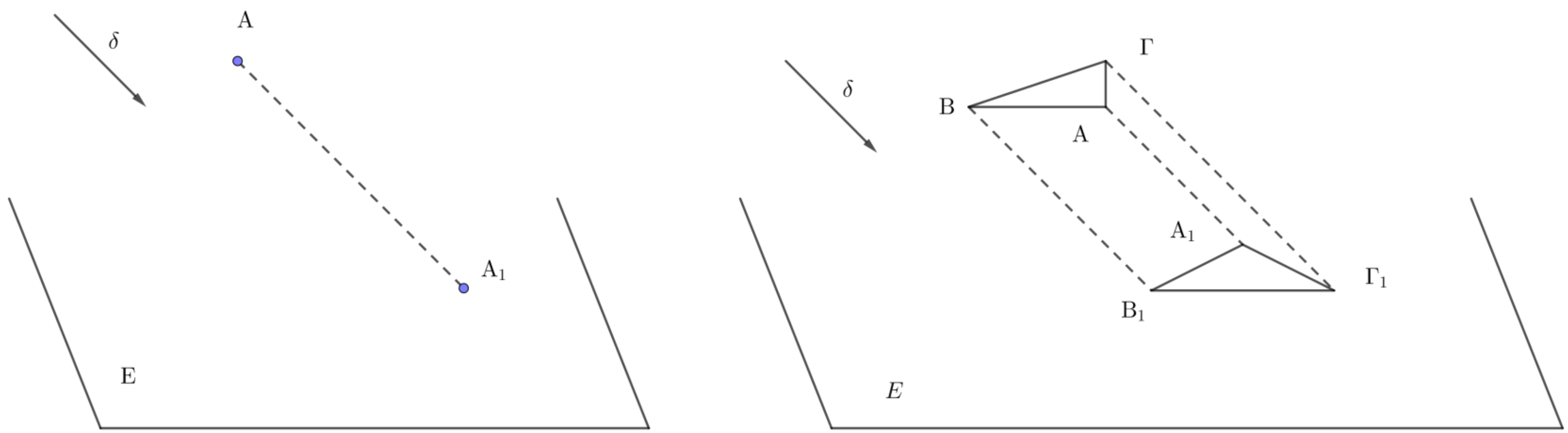
Θεωρούμε ένα επίπεδο E και μια ευθεία δ η οποία δεν είναι παράλληλη στο επίπεδο. Από ένα σημείο Α του χώρου, φέρουμε μια ευθεία παράλληλη προς την δ η οποία τέμνει το Ε στο σημείο A_1. Το A_1 λέγεται παράλληλη προβολή του A στο E στην κατεύθυνση της δ.

Αν η δ είναι κάθετη στο E, τότε η παράλληλη προβολή λέγεται ορθή (σχήμα 1), διαφορετικά λέγεται πλάγια (σχήμα 1β).



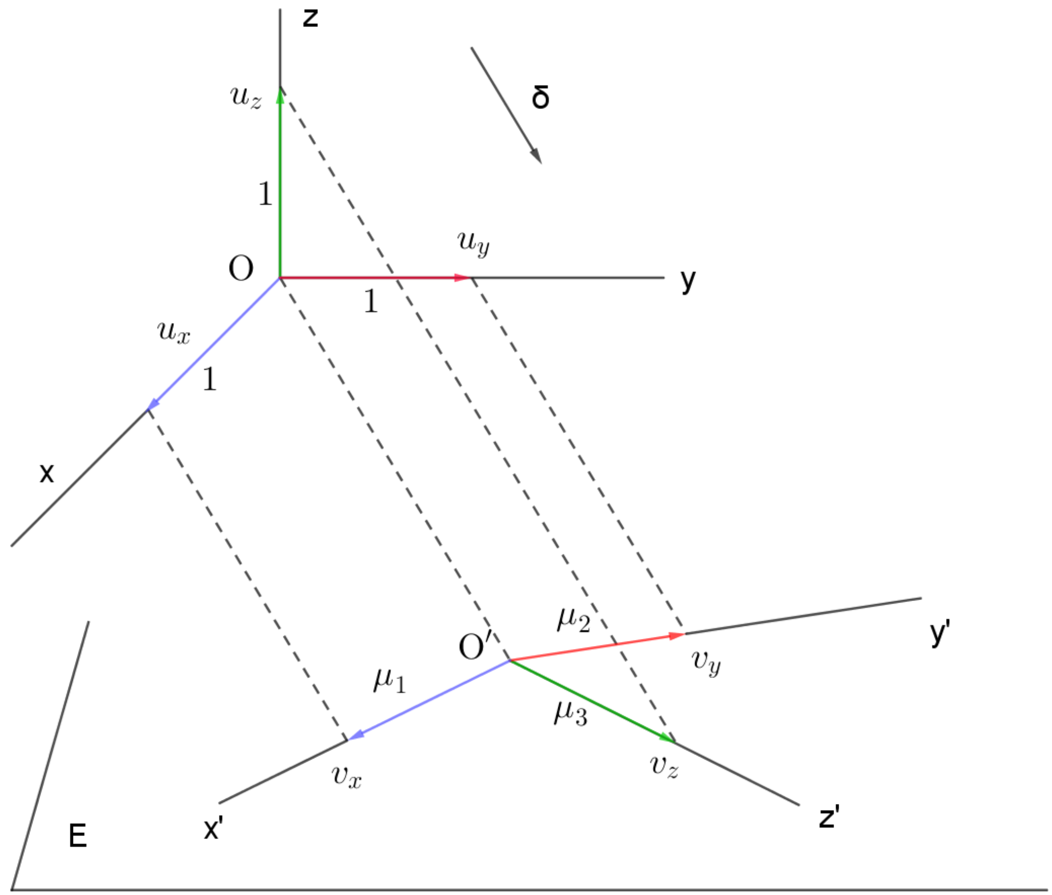
Σχήμα 1

Αν έχουμε ένα αντικείμενο Σ στο χώρο, η προβολή κάθε σημείου του στο Ε δίνει ένα σχήμα Σ_1 που λέγεται <u>παράλληλη προβολή</u> του Σ στο Ε.



Σχήμα 1β

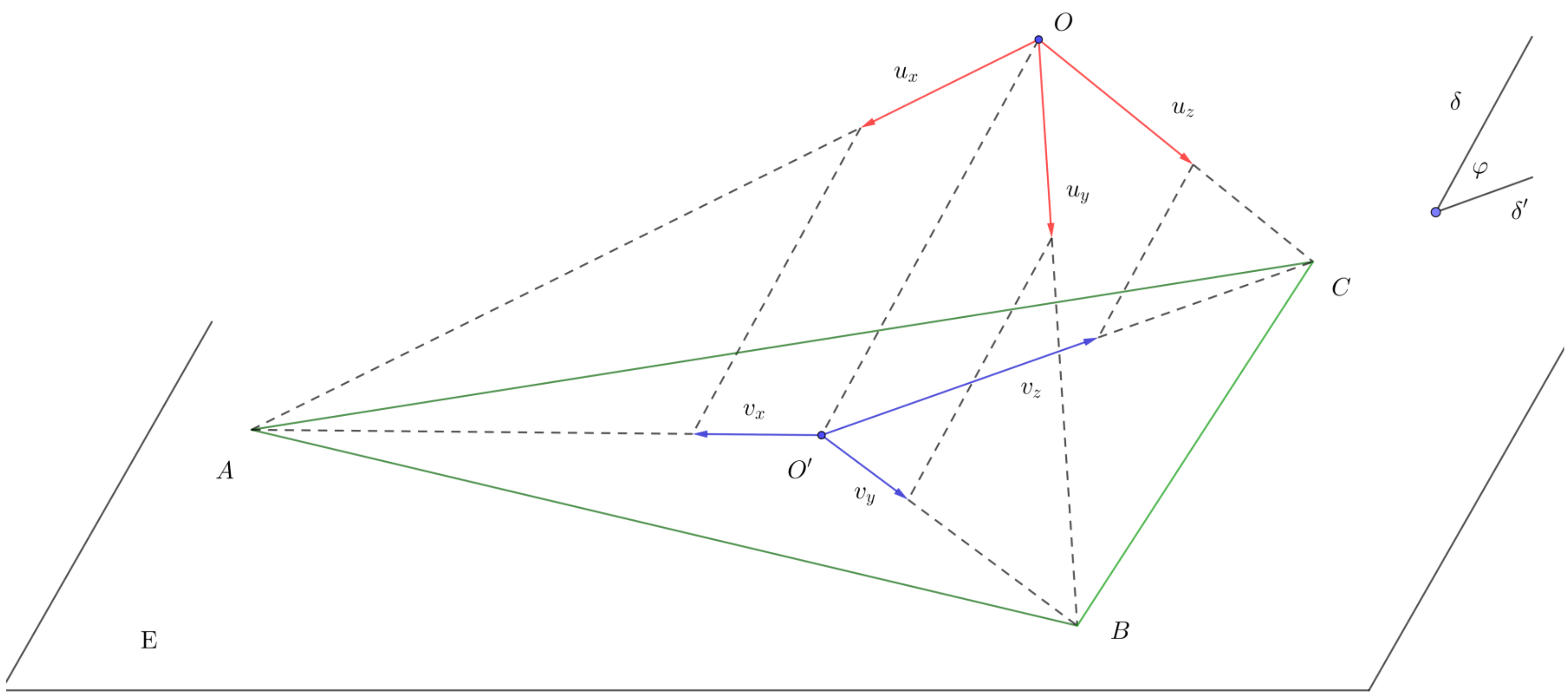
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα σύστημα καθέτων μεταξύ τους αξόνων Ox, Oy, Oz στο χώρο και θεωρούμε ένα διάνυσμα μοναδιαίου μήκους πάνω σε κάθε άξονα. Αυτά τα διανύσματα συμβολίζονται με u_x, u_y, u_z. Προβάλλουμε τους άξονες σε ένα επίπεδο Ε στην κατεύθυνση μιας ευθείας δ και παίρνουμε ένα νέο σύστημα αξόνων $O'x', O'y', O'z'$ πάνω στο επίπεδο Ε. Τα διανύσματα u_x, u_y, u_z προβάλλονται στα διανύσματα v_x, v_y, v_z με μήκη μ_1, μ_2, μ_3 :



Σχήμα 2

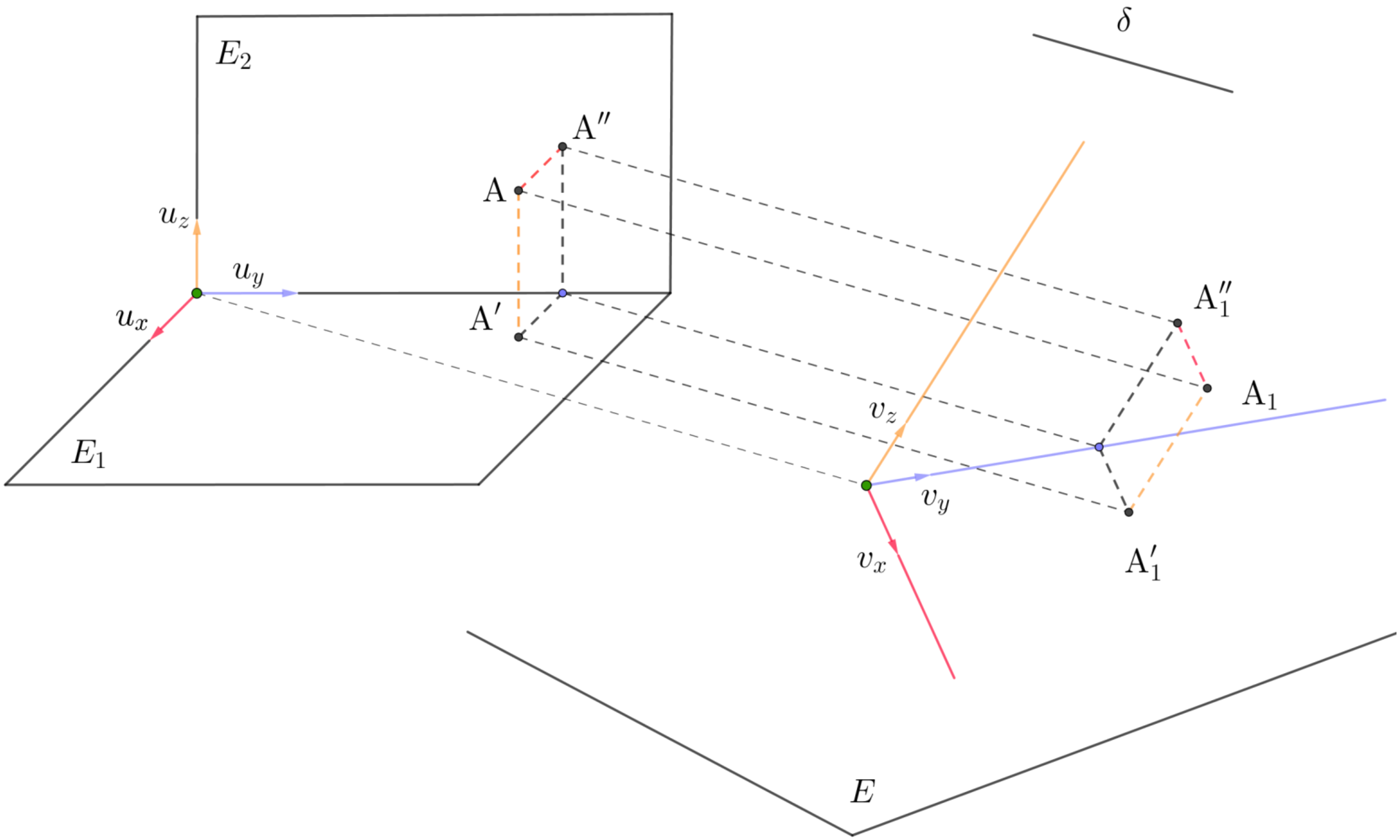
Το αξονομετρικό τρίγωνο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι προβολές v_x, v_y, v_z των u_x, u_y, u_z κατά την διεύθυνση της ευθείας δ. Το τρίγωνο ABC λέγεται αξονομετρικό τρίγωνο.



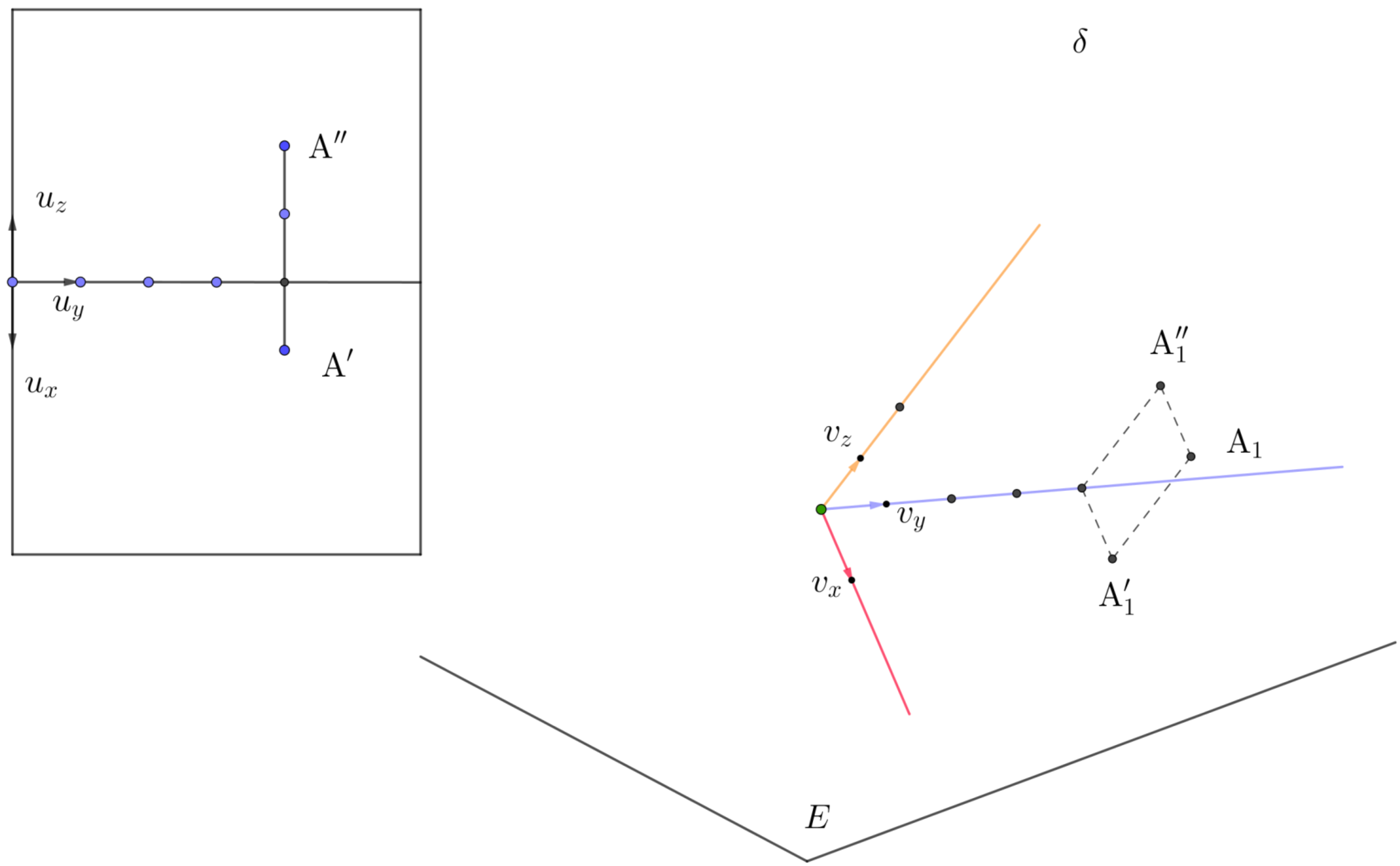
Σχήμα 2β

Το σημείο $A(A', A'')$ στο σύστημα των δύο επιπέδων του Monge έχει αξονομετρική προβολή το σημείο A_1 με δευτερεύουσες αξονομετρικές προβολές A'_1, A''_2.



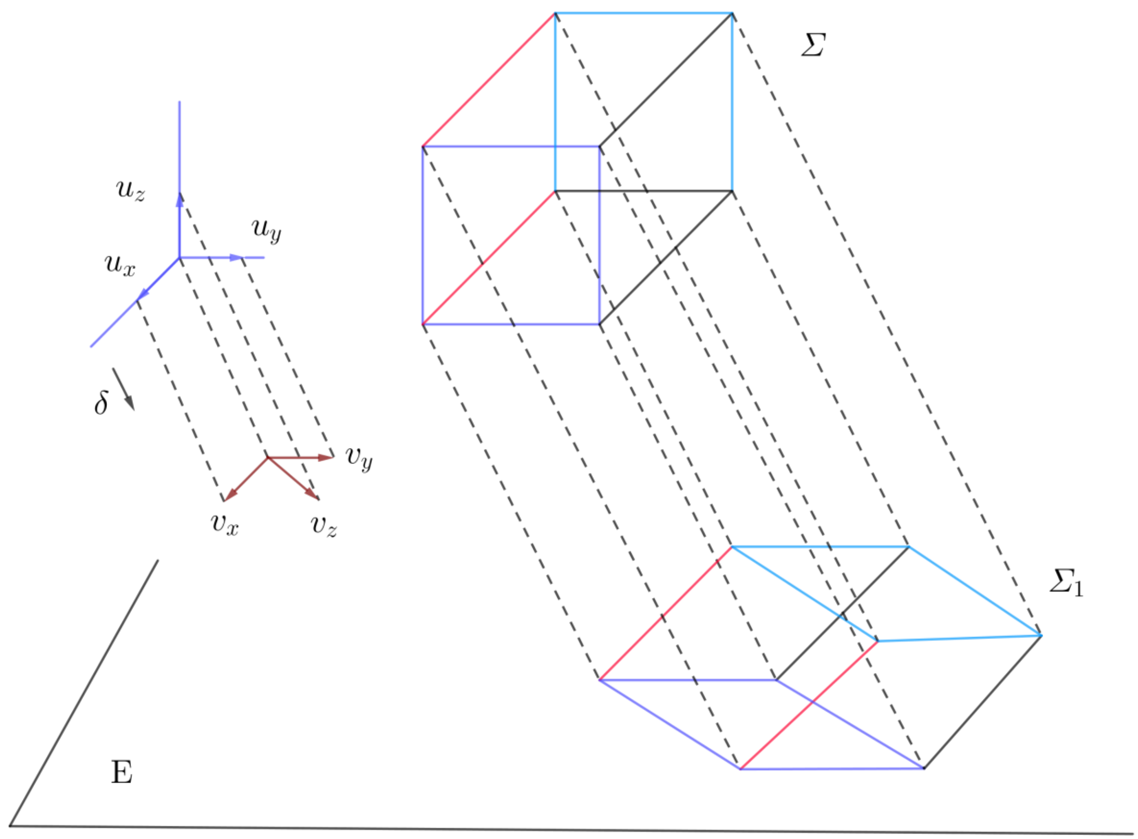
Σχήμα 3

Η αξονομετρική προβολή A_1 του σημείου $A = (1, 4, 2)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 3α

Θεωρούμε τώρα ένα αντικείμενο Σ στο χώρο το οποίο προβάλλουμε στο επίπεδο E στην κατεύθυνση της ευθείας δ και παίρνουμε ένα σχήμα Σ_1 πάνω στο επίπεδο E. Το Σ_1 λέγεται αξονομετρική προβολή του Σ στο E στην κατεύθυνση δ.



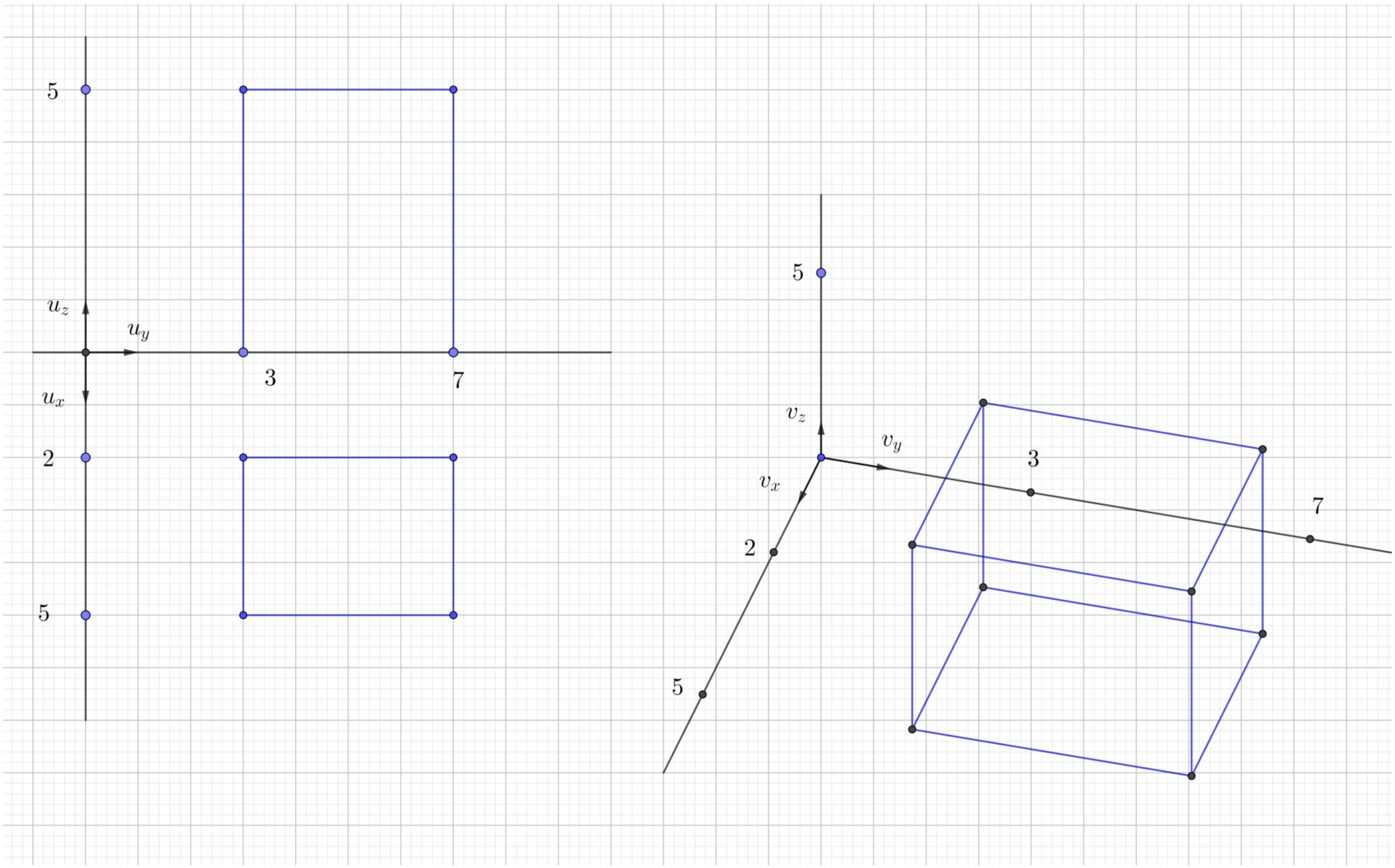
Σχήμα 4

Παράδειγμα

Έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο πάνω στο στο επίπεδο E_1. Η αποτύπωσή του στο χαρτί φαίνεται αριστερά.

Τα διανύσματα u_x, u_y, u_z προβάλλονται παράλληλα στα διανύσματα v_x, v_y, v_z.

Η αξονομετρική προβολή του παραλληλεπιπέδου στο σύστημα v_x, v_y, v_z φαίνεται δεξιά.



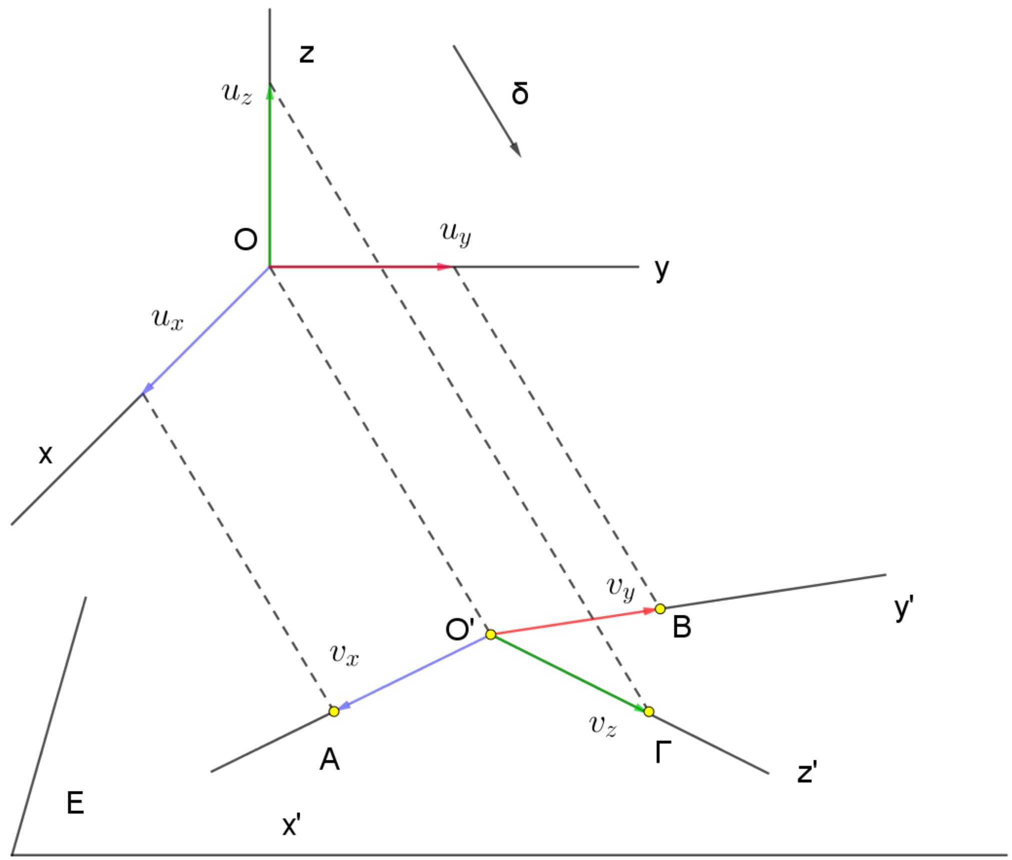
Σχήμα 4β

Έστω ότι τα διανύσματα v_x, v_y, v_z έχουν μήκη $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$.

Αν $\mu_1 = \ \mu_2 = \mu_3$ τότε η αξονομετρική προβολή λέγεται ισομετρική. Αν μόνον δύο εκ των $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3$ είναι ίσοι, τότε η αξονομετρική προβολή λέγεται διμετρική. Αν οι μ_1, μ_2, μ_3 ειναι ανά δύο διαφορετικοί αριθμοί τότε η αξονομετρική προβολή λέγεται τριμετρική.

Αν η δ είναι κάθετη στο E, τότε η αξονομετρική προβολή λέγεται ορθή. Διαφορετικά, λέγεται πλάγια.

Το θεώρημα του Pohlke



Σχήμα 5

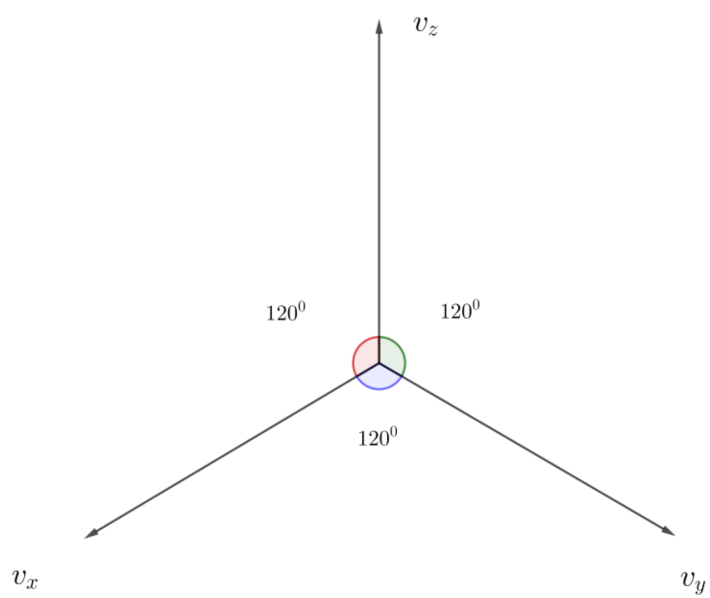
Έστω O', A, B, Γ τέσσερα σημεία (κίτρινο χρώμα) σε ένα επίπεδο E τα οποία <u>δεν βρίσκονται σε μια ευθεία</u>. Τότε τα διανύσματα $v_x = \overrightarrow{O'A}$, $v_y = \overrightarrow{O'B}$, $v_z = \overrightarrow{O'\Gamma}$ προέρχονται από μια προβολή στην κατεύθυνση μιας ευθείας δ ενός συστήματος καθέτων μεταξύ τους αξόνων Ox, Oy, Oz με μοναδιαία διανύσματα u_x, u_y, u_z.

Είδη ορθής αξονομετρικής προβολής

<u>Ισομετρία</u>

Όταν $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ και οι γωνίες μεταξύ των διανυσμάτων v_x, v_y, v_z είναι 120^0, τότε η ορθή αξονομετρική προβολή λέγεται <u>ισομετρία</u>.

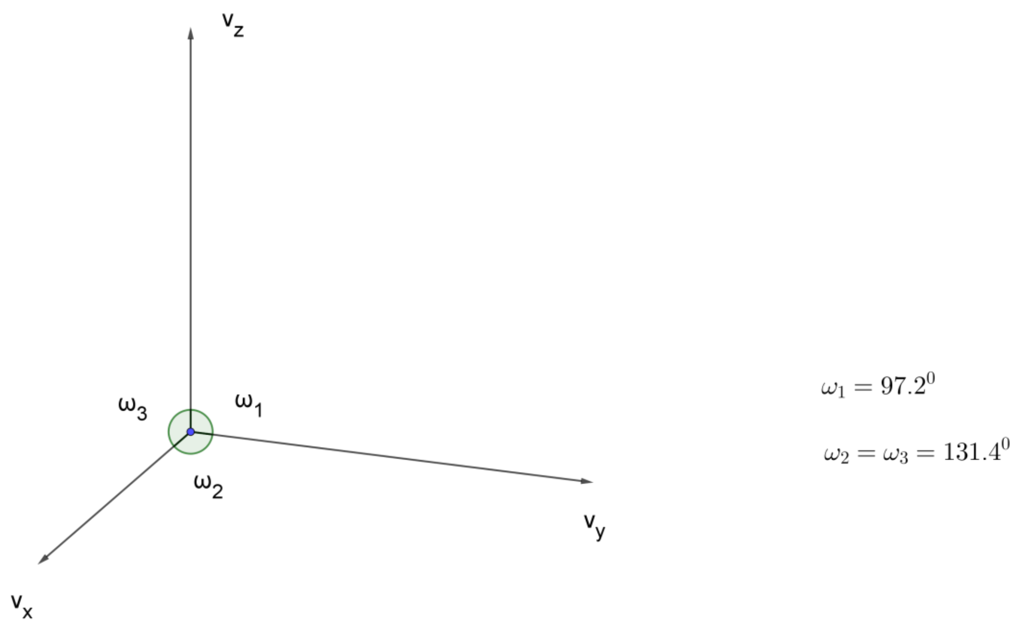
Σχέση μονάδων $1:1:1$



Σχήμα 6

Αξονομετρία Μηχανικών

Όταν $\mu_1 = 1,\ \ \mu_2 = 2, \mu_3 = 2$ και οι γωνίες μεταξύ των v_x, v_y, v_z είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



Σχήμα 7

Σχέση μονάδων 1: 2: 2

Είδη πλάγιας αξονομετρικής προβολής

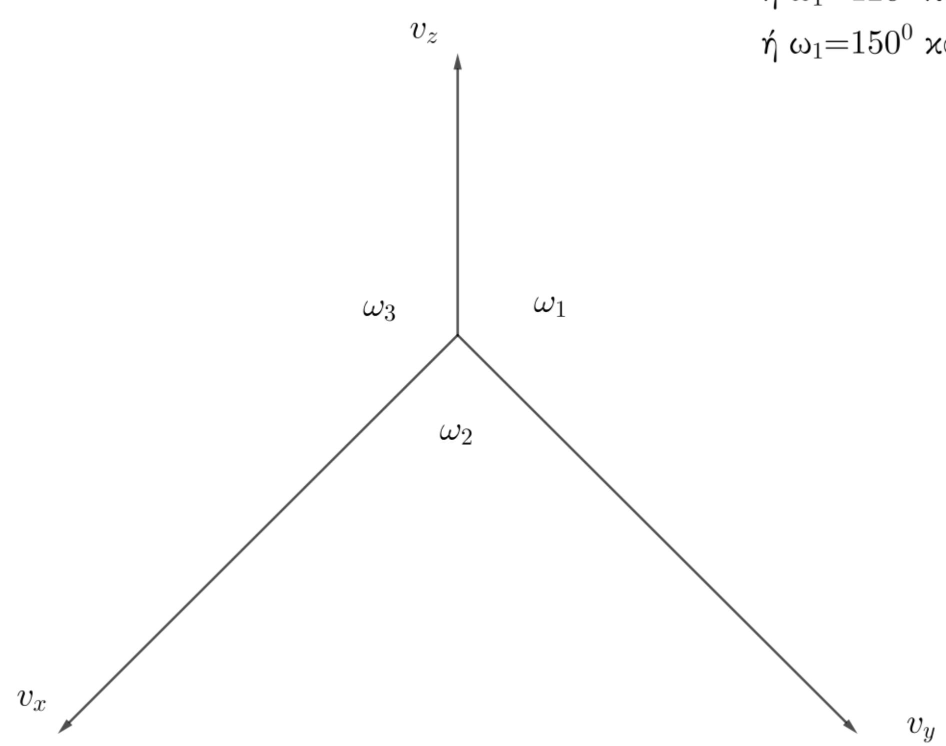
<u>Οριζόντια Cavaliere</u>

Όταν $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2, \mu_3 = 1$ και οι γωνίες μεταξύ των v_x, v_y, v_z είναι όπως στο παρακάτω σχήμα

$$\omega_2 = 90^0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \omega_1 = \omega_3 = 135^0$$

ή $\omega_1 = 120^0$ και $\omega_2 = 150^0$

ή $\omega_1 = 150^0$ και $\omega_2 = 120^0$



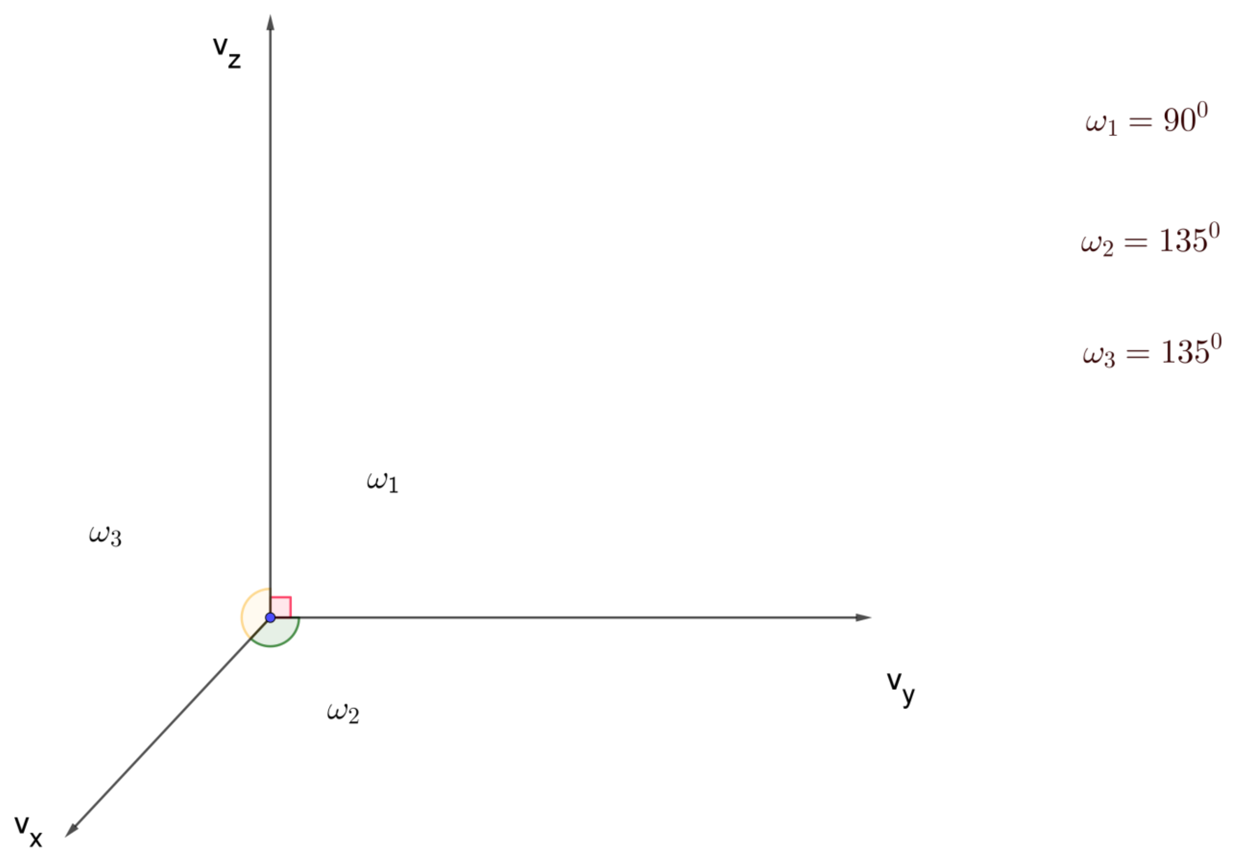
Σχήμα 8

Σχέση μονάδων $2:2:1$, οπότε αυτή η αξονομετρία είναι <u>διμετρική</u>.

<u>Παρατήρηση</u>. Επειδή η ω_2 είναι ορθή, η κάτοψη ενός κτηρίου μεταφέρεται αυτούσια στην οριζόντια Cavaliere.

<u>Μετωπική Cavaliere</u>

Όταν $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 2, \mu_3 = 1$ και οι γωνίες μεταξύ των v_x, v_y, v_z είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



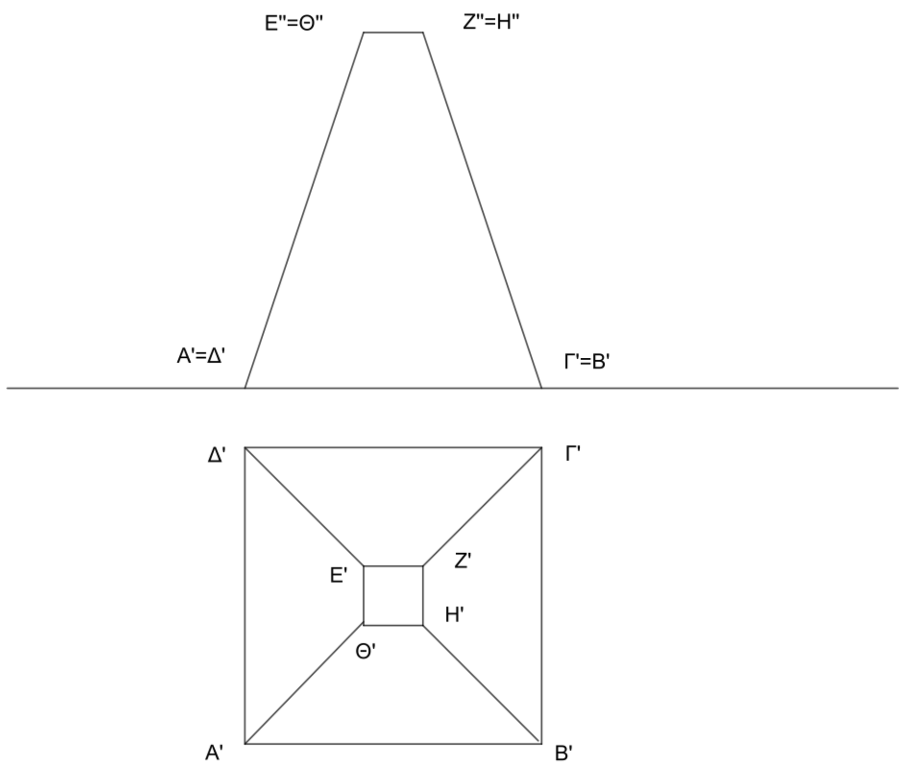
Σχήμα 9

Σχέση μονάδων $1:2:2$

<u>Παρατήρηση</u>. Επειδή η ω_1 είναι ορθή, η όψη ενός κτηρίου μεταφέρεται αυτούσια στην μετωπική Cavaliere.

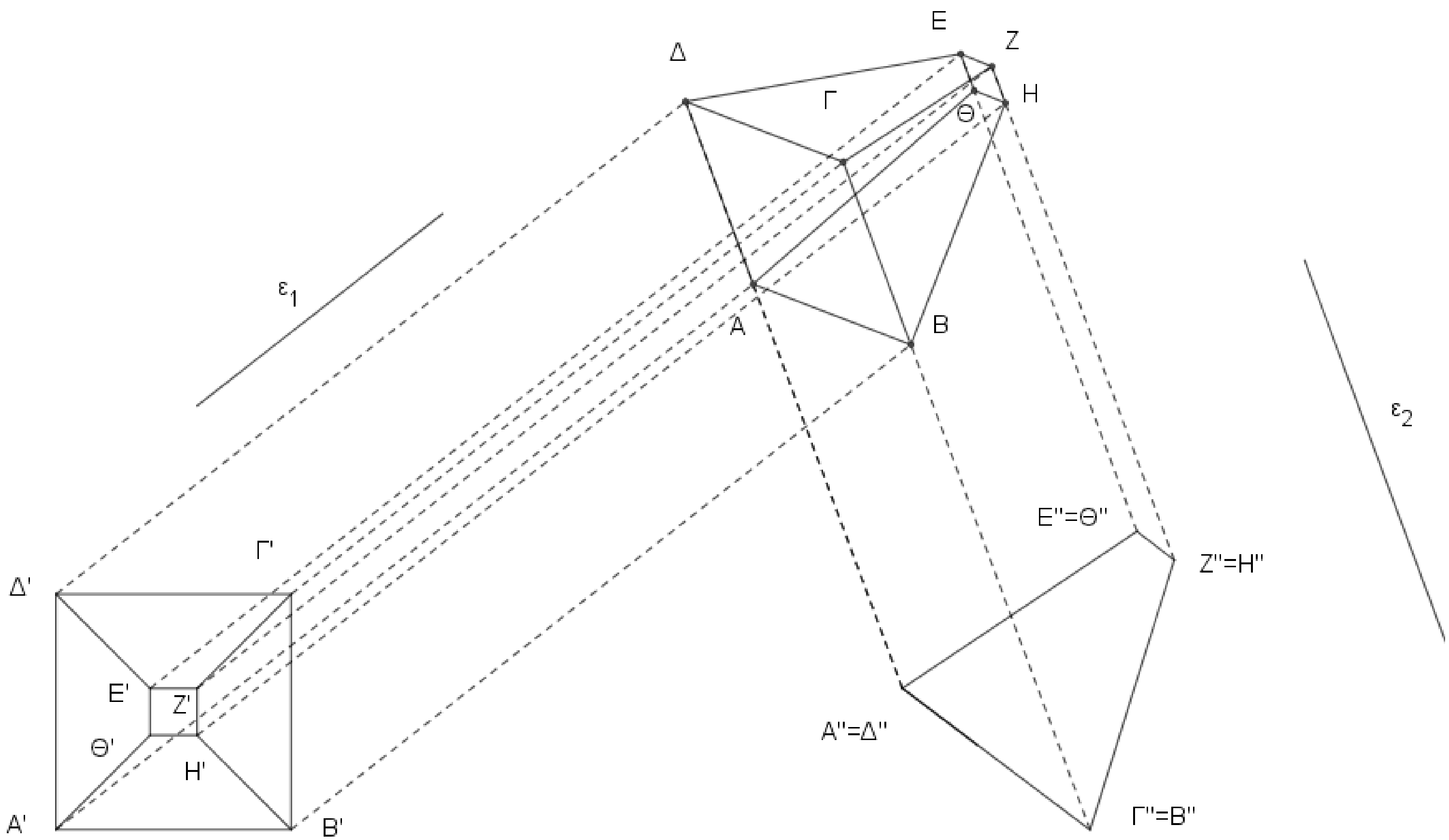
Η σχέση μεταξύ της αξονομετρίας και της μεθόδου του Monge

Θεωρούμε την πρώτη και την δεύτερη προβολή μιας κόλουρης πυραμίδας .



Σχήμα 10

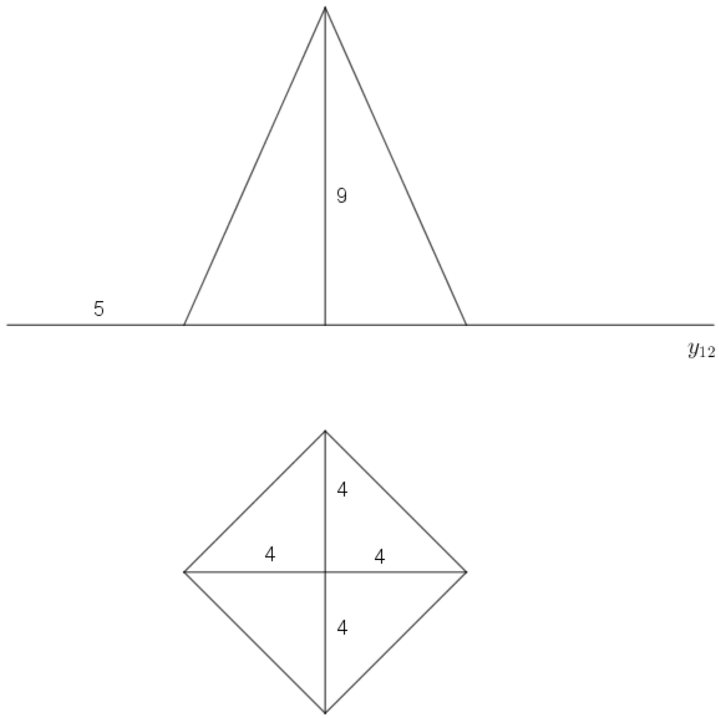
Τοποθετούμε την πρώτη και την δεύτερη προβολή τυχαία πάνω σε ένα επίπεδο. Παίρνουμε δυο μη παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του επιπέδου. Από ένα σημείο της πρώτης προβολής, έστω το A', φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ε_1 και από το A'' φέρουμε παράλληλη προς την ε_2, ονομάζουμε Α το σημείο τομής τους. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για κάθε σημείο της πρώτης προβολής. <u>Αποδεικνύεται ότι το σχέδιο που παίρνουμε είναι μια αξονομετρική προβολή της κόλουρης πυραμίδας</u>. Το αυτό ισχύει αν η κόλουρη πυραμίδα αντικατασταθεί από ένα άλλο αντικείμενο.



Σχήμα 11

Ασκήσεις

1. Μια πυραμίδα έχει την πρώτη και δεύτερη προβολή που δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να σχεδιάσετε τις 4 αξονομετρικές προβολές της που έχουμε δεί.

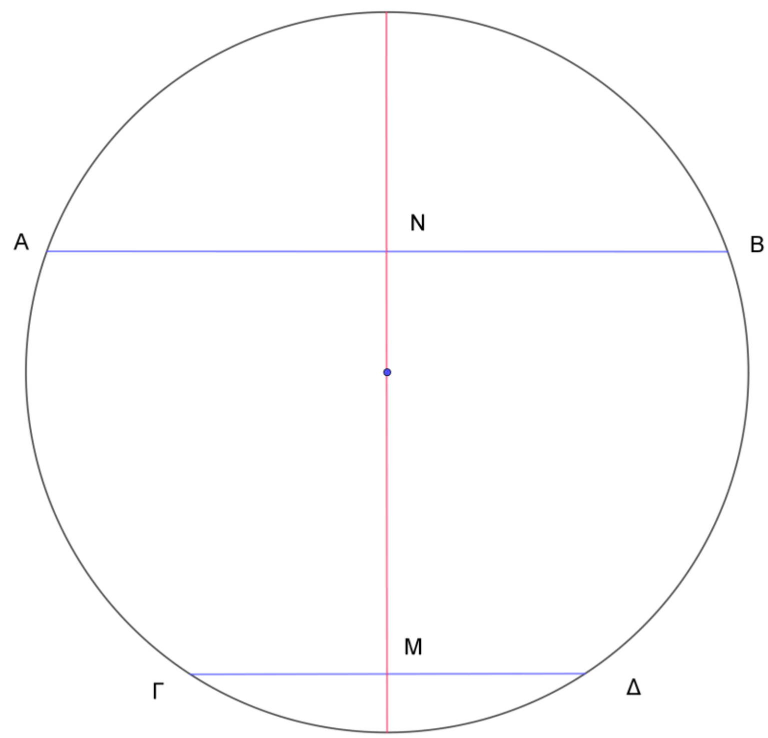


Σχήμα 12

2. Θεωρούμε τις ορθές προβολές δ'_1, δ'_2 πάνω σε ένα επίπεδο ε των καθέτων μεταξύ τους ευθειών δ_1, δ_2. Αν μία από τις δ_1, δ_2 είναι παράλληλη στο ε, να δείξετε ότι οι δ'_1, δ'_2 είναι κάθετες.

Συζυγείς διάμετροι έλλειψης

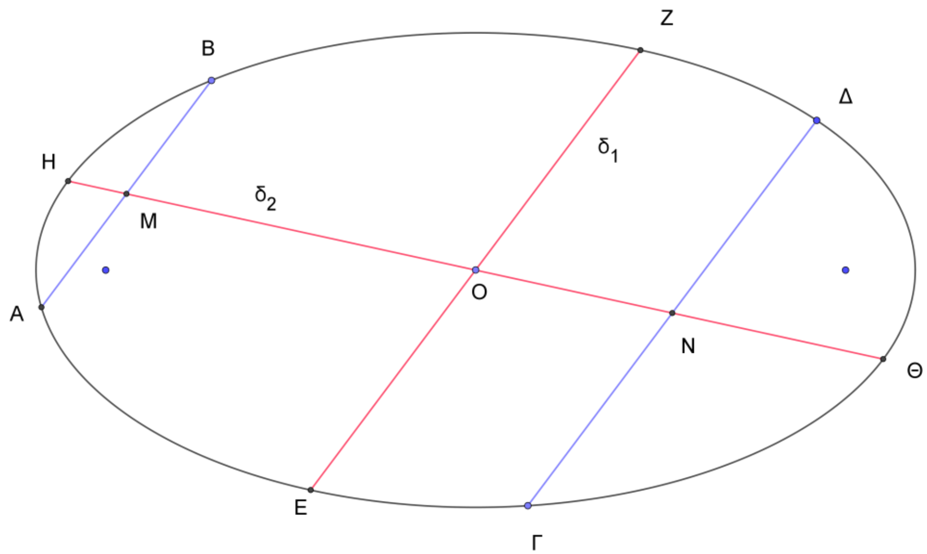
Θεωρούμε ένα κύκλο και δύο παράλληλες χορδές του AB και $ΓΔ$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα που περιλαμβάνει τα μέσα M, N των χορδών $AB, ΓΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου.



Σχήμα 13

Δύο διάμετροι μιας έλλειψης δ_1, δ_2 λέγονται <u>συζυγείς</u> αν τα μέσα των χορδών που είναι παράλληλες προς την δ_1 βρίσκονται στην δ_2.

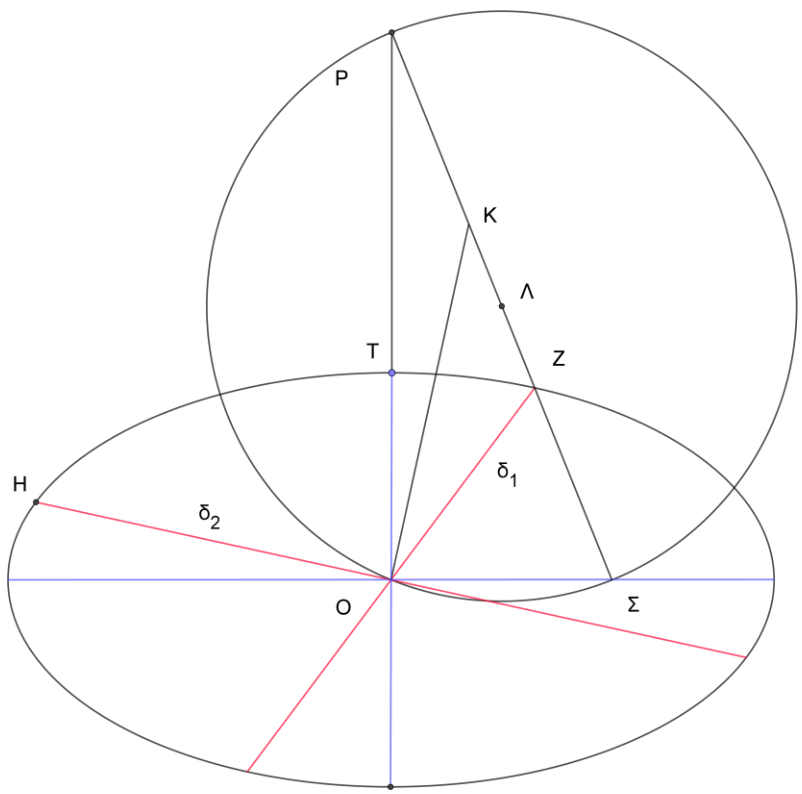
Στο παρακάτω σχήμα οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες προς την δ_1. Η δ_2 διέρχεται από τα μέσα Μ, Ν των χορδών.



Σχήμα 14

Η μέθοδος του Rytz

Θα δούμε τώρα πως εντοπίζουμε τους κύριους άξονες μιας έλλειψης (μπλέ χρώμα) όταν γνωρίζουμε δύο συζυγείς διαμέτρους της δ_1, δ_2 (κόκκινο χρώμα).

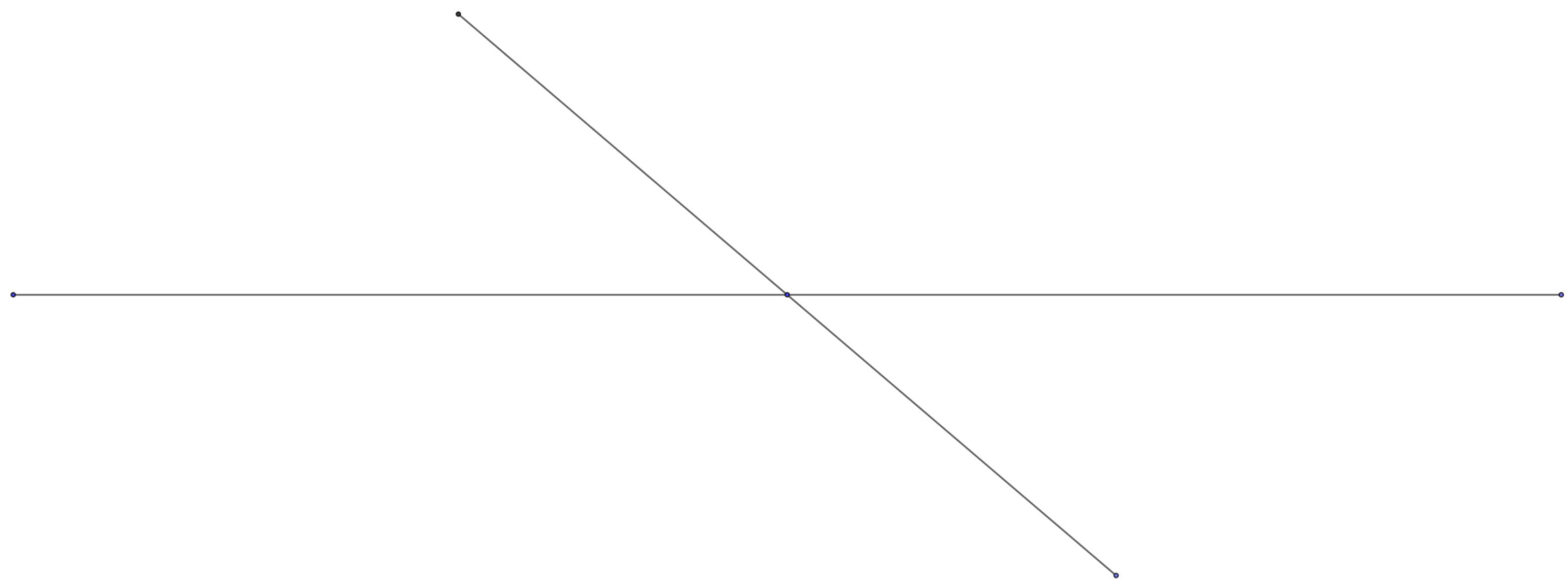


Σχήμα 15α

Απο το O φέρνουμε κάθετο στην δ_2 και επ΄αυτής παίρνουμε σημείο K τέτοιο ώστε $KO = OH$. Με κέντρο το μέσον Λ της KZ και ακτίνα ΛO σχεδιάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την ευθεία που διέρχεται απο τα K, Z στα σημεία P και Σ. Οι κύριοι άξονες της έλλειψης (μπλέ χρώμα) βρίσκονται πάνω στις ευθείες που διέρχονται από τα O, Σ και τα O, P. Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2 \times PZ$ και ο μικρός $2 \times Z\Sigma$.

Άσκηση.

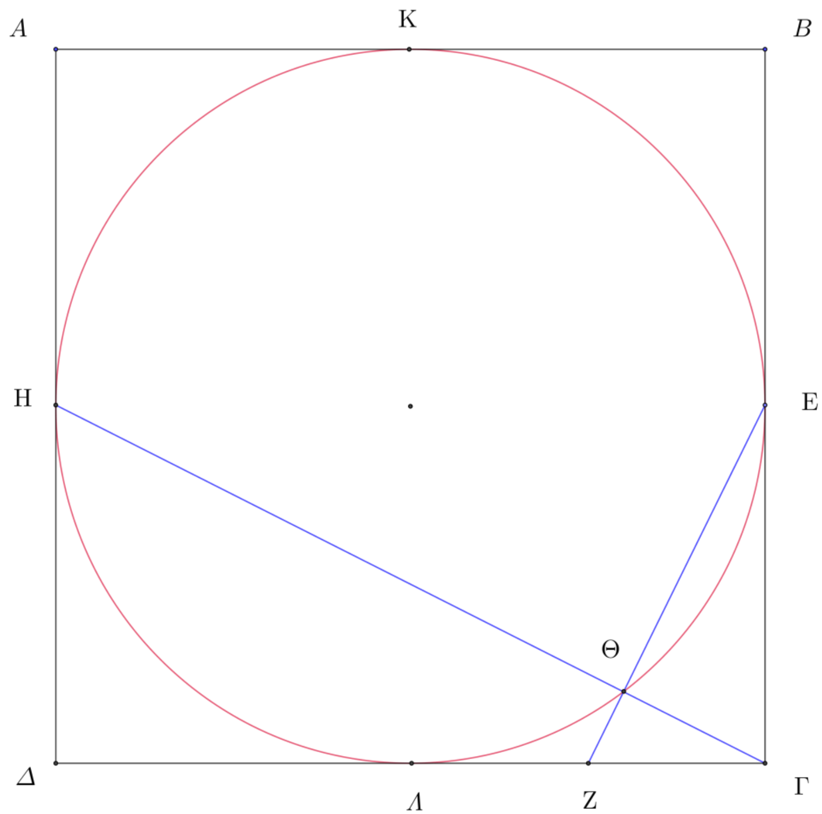
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι συζυγείς διάμετροι μιας έλλειψης. Να σχεδιάσετε τους άξονες της έλλειψης με την μέθοδο του Rytz.



Σχήμα 15β

Η αξονομετρία του κύκλου

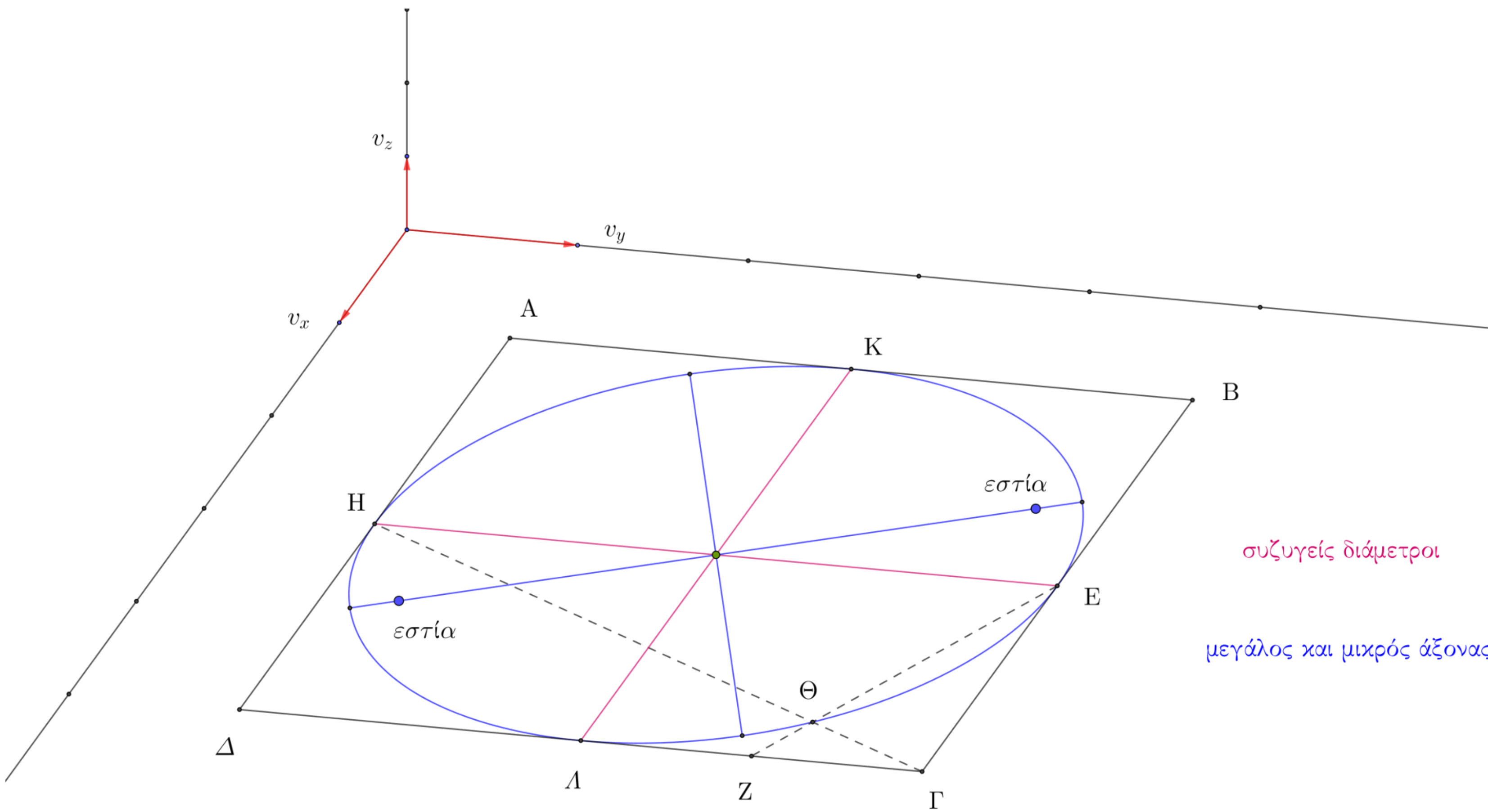
Δίνεται μια αξονομετρία $v_x, v_y, v_z, \mu_1, \mu_2, \mu_3$. Για να σχεδιάσουμε το αξονομετρικό ενός κύκλου, το οποίο είναι ένας κύκλος ή μια έλλειψη, αρχικά σχεδιάζουμε το περιγεγραμμένο σε αυτόν τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στους άξονες και συνεχίζουμε σχεδιάζοντας το αξονομετρικό αυτού του τετραγώνου.



Σχήμα 16

Το αξονομετρικό του κύκλου διέρχεται απο τα αξονομετρικά των μέσων των πλευρών του τετραγώνου H, K, E, Λ. Όμως, <u>για να σχεδιάσουμε μιά έλλειψη πρέπει να γνωρίζουμε 5 σημεία απο τα οποία αυτή διέρχεται</u>. Χρειαζόμαστε λοιπόν άλλο ένα σημείο της. Θα αποδείξουμε ότι η τομή Θ του ευθύγραμμου τμήματος EZ, Z μέσον του ΛΓ, με το ευθύγραμμο τμήμα $H\Gamma$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο. Προς τούτο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η γωνία $H\Theta E$ είναι ορθή. Τα τρίγωνα ΔΗΓ και ΖΕΓ είναι ορθογώνια και οι κάθετες πλευρές του ΔΗΓ έχουν διπλάσιο μήκος απο τις αντίστοιχες πλευρές του ΕΖΓ, άρα αυτά είναι όμοια. Η γωνία ΔΓΗ και η γωνία ΖΕΓ είναι ίσες, η πλευρά ΔΓ της ΔΓΗ είναι κάθετη στην πλευρά ΕΓ της ΖΕΓ, άρα η ΕΖ είναι κάθετη στην ΗΓ, αποδεικνύοντας το ζητούμενο. Επειδή η ΗΕ είναι διάμετρος του κύκλου και η ΗΘΕ είναι ορθή, το σημείο Θ βρίσκεται στον κύκλο.

Το αξονομετρικό του κύκλου δίνεται παρακάτω.



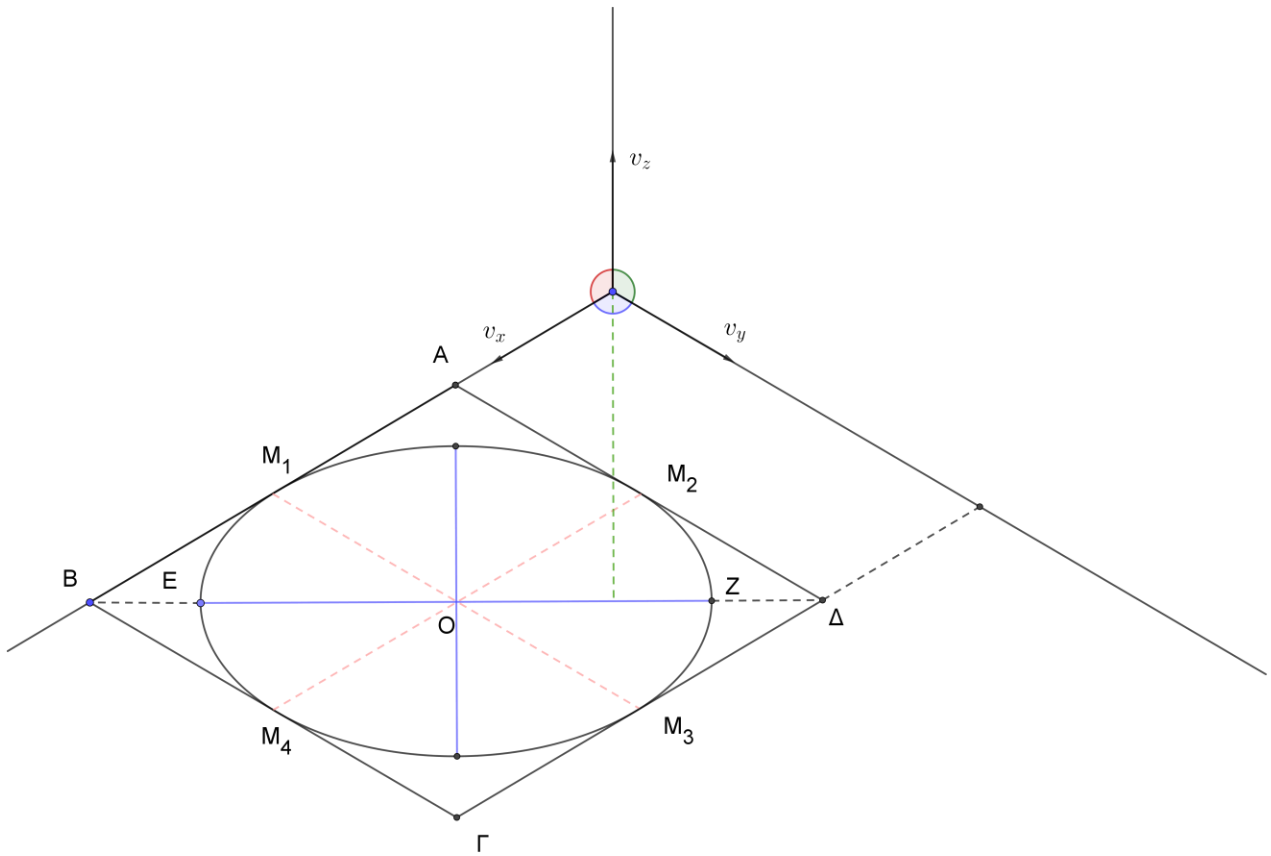
Σχήμα 16β

Η έλλειψη διέρχεται απο τα σημεία H, K, E, Θ, Λ, με το κόκκινο χρώμα είναι σχεδιασμένες οι συζυγείς διάμετροι. Η κατασκευή του Rytz καθορίζει τους άξονες της έλλειψης (μπλέ χρώμα).

Θα δούμε τώρα μερικά παραδείγματα.

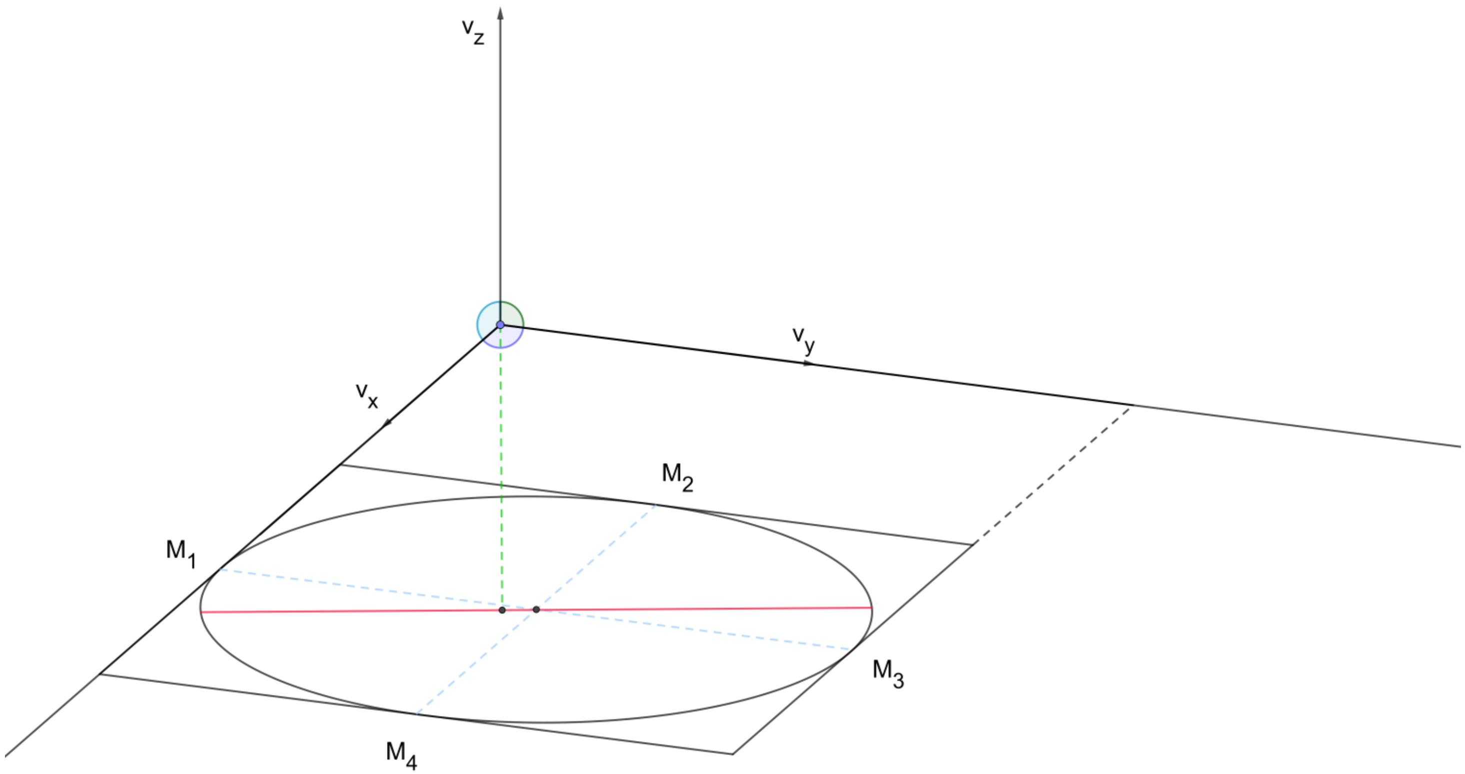
<u>Ισομετρική αξονομετρία του κύκλου</u>

Το αξονομετρικό του τετραγώνου είναι ο ρόμβος ΑΒΓΔ. Το αξονομετρικό του κύκλου είναι η έλλειψη η οποία διέρχεται απο τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4. Αποδεικνύεται ότι τα ευθύγραμμα τμήματα M_1M_3 και M_4M_2 είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης καθώς επίσης ότι η προέκταση του άξονα των z (πράσινο χρώμα) είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης - <u>αυτή η ιδιότητα ισχύει για τις ορθές αξονομετρίες</u>.



Σχήμα 17

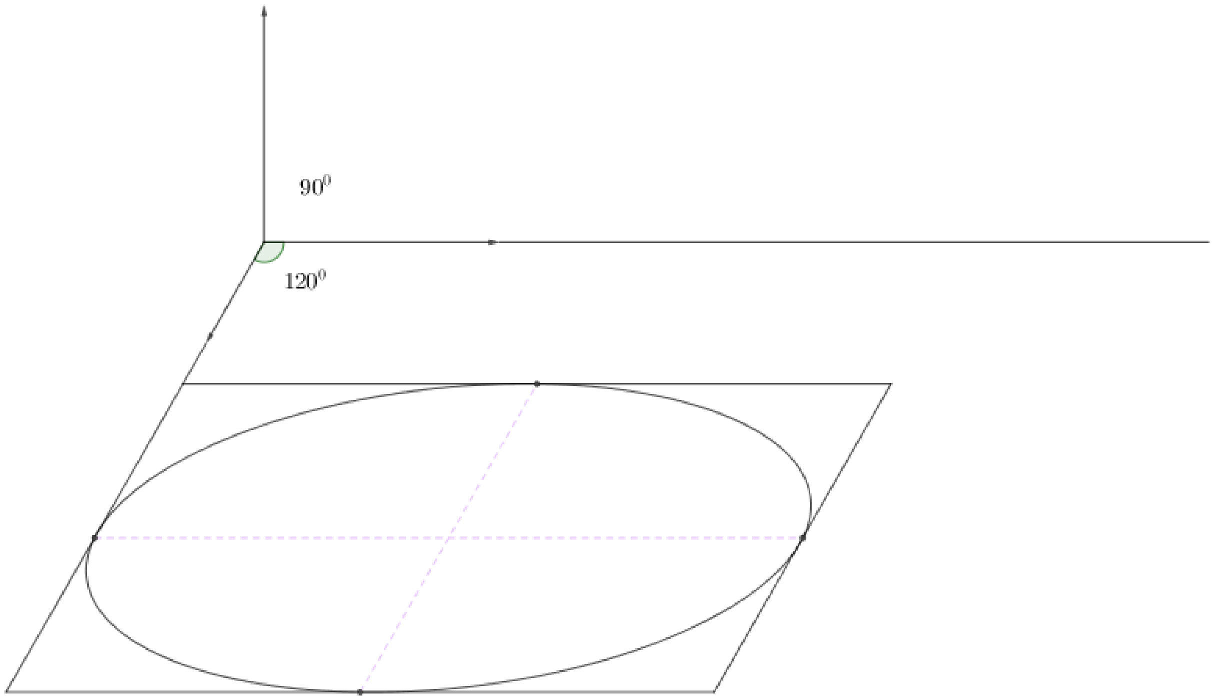
Αξονομετρία μηχανικών για τον κύκλο



Σχήμα 18

Το αξονομετρικό του κύκλου είναι η έλλειψη η οποία διέρχεται απο τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4. Αποδεικνύεται πάλι ότι τα ευθύγραμμα τμήματα M_1M_3 και M_4M_2 είναι συζυγείς διάμετροι της έλλειψης καθώς επίσης ότι η προέκταση του άξονα των z (πράσινο χρώμα) είναι κάθετη στον μεγάλο άξονα της έλλειψης. Οι κύριοι άξονες της έλλειψης σχεδιάζονται με την βοήθεια της κατασκευής του Rytz.

Μετωπική Cavaliere για τον κύκλο



Σχήμα 19

Οι σχεδιασμένες διάμετροι είναι συζυγείς. Οι κύριοι άξονες της έλλειψης σχεδιάζονται με την βοήθεια της κατασκευής του Rytz.

Άσκηση

Να σχεδιάσετε την οριζόντια Cavaliere αξονομετρία για τον κύκλο του σχήματος 16.

Εφαπτόμενες ευθείες σε μια έλλειψη

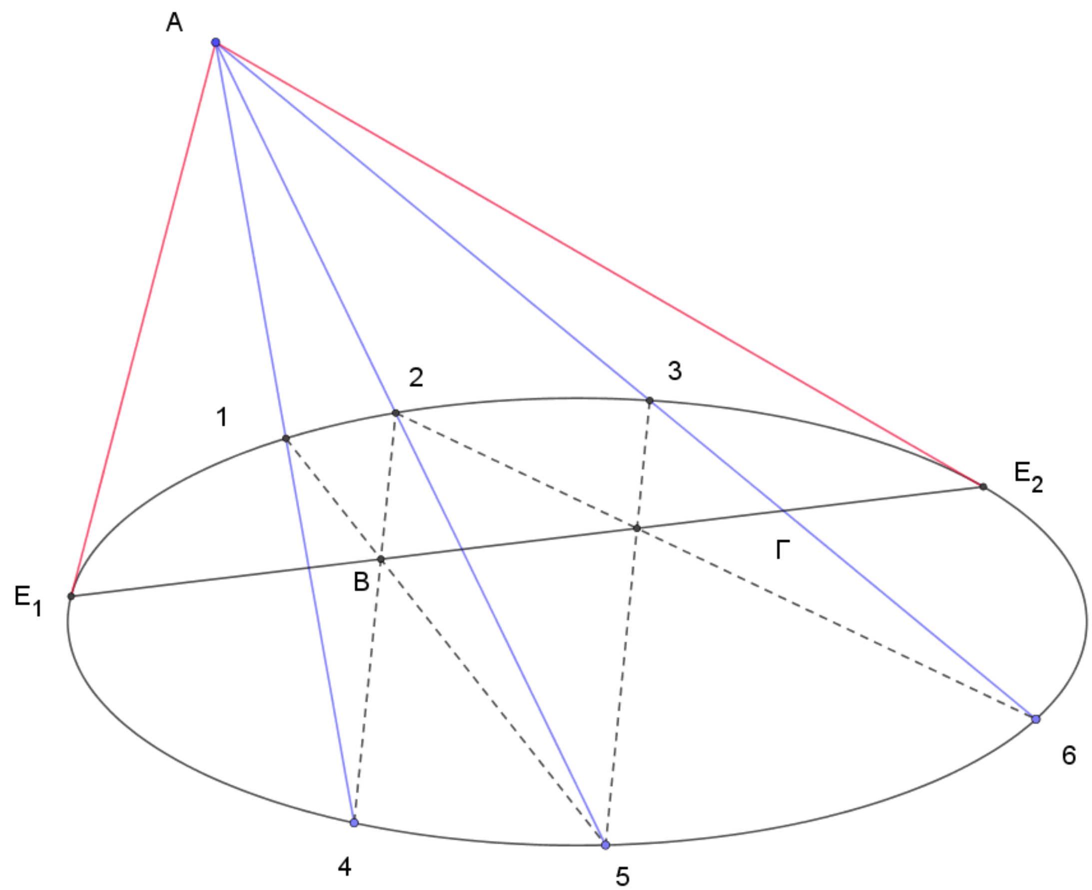
Θεωρούμε μια έλλειψη και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Για να σχεδιάσουμε τις ευθείες που διέρχονται από το Α και εφάπτονται στην έλλειψη ακολουθούμε τα παρακάτω:

Απο το Α σχεδιάζουμε τρείς ευθείες (μπλέ χρώμα) οι οποίες την τέμνουν στα σημεία απο 1 έως 6.

Με Β, Γ σημειώνουμε τα σημεία τομής των ευθυγράμμων τμημάτων 15 με 42 και 26 με 35.

Η ευθεία που διέρχεται από τα Β, Γ (λέγεται ευθεία Pascal) τέμνει την έλλειψη στα σημεία E_1, E_2.

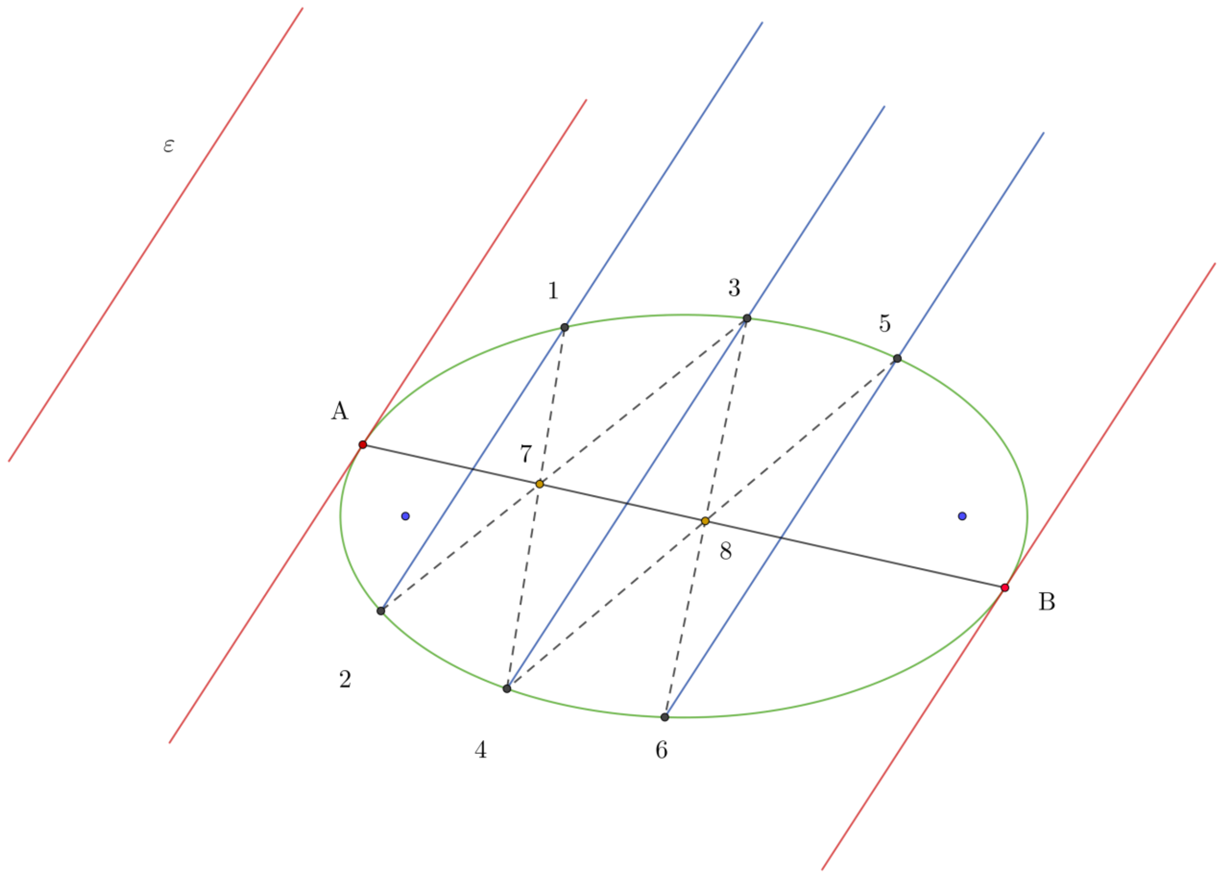
Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα AE_1, AE_2 (κόκκινο χρώμα) εφάπτονται στην έλλειψη.



Σχήμα 20α

Δίνεται μια ευθεία ε και μια έλλειψη. Θα σχεδιάσουμε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ε και εφάπτονται στην έλλειψη.

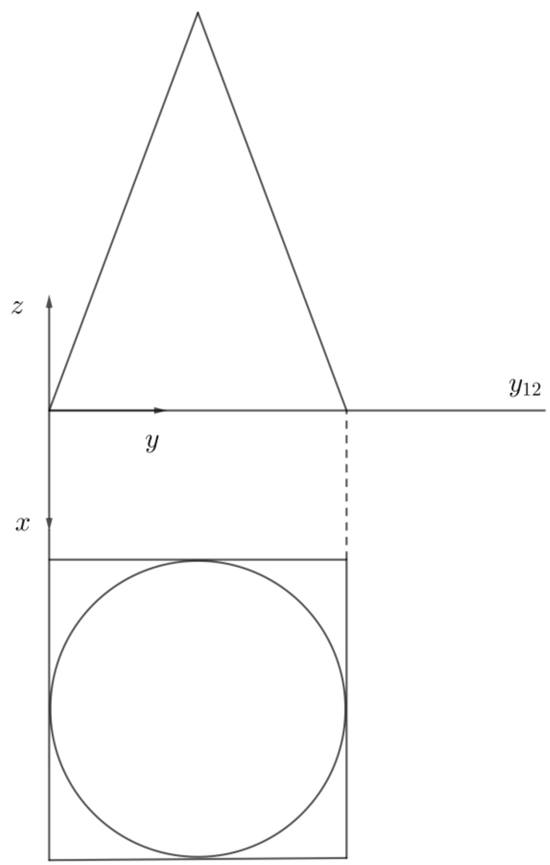
Σχεδιάζουμε τρείς ευθείες παράλληλες στην ε (μπλέ) οι οποίες τέμνουν την έλλειψη στα σημεία από 1 έως 6. Οι ευθείες 14 και 23 τέμνονται στο σημείο 7, οι ευθείες 36 και 45 τέμνονται στο σημείο 8. Τα σημεία τομής της ευθείας που διέρχεται απο τα 7, 8 τέμνουν την έλλειψη στα σημεία Α, Β. Οι εφαπτόμενες στην έλλειψη σε αυτά τα σημεία (κόκκινες) είναι παράλληλες στην ε.



Σχήμα 20β

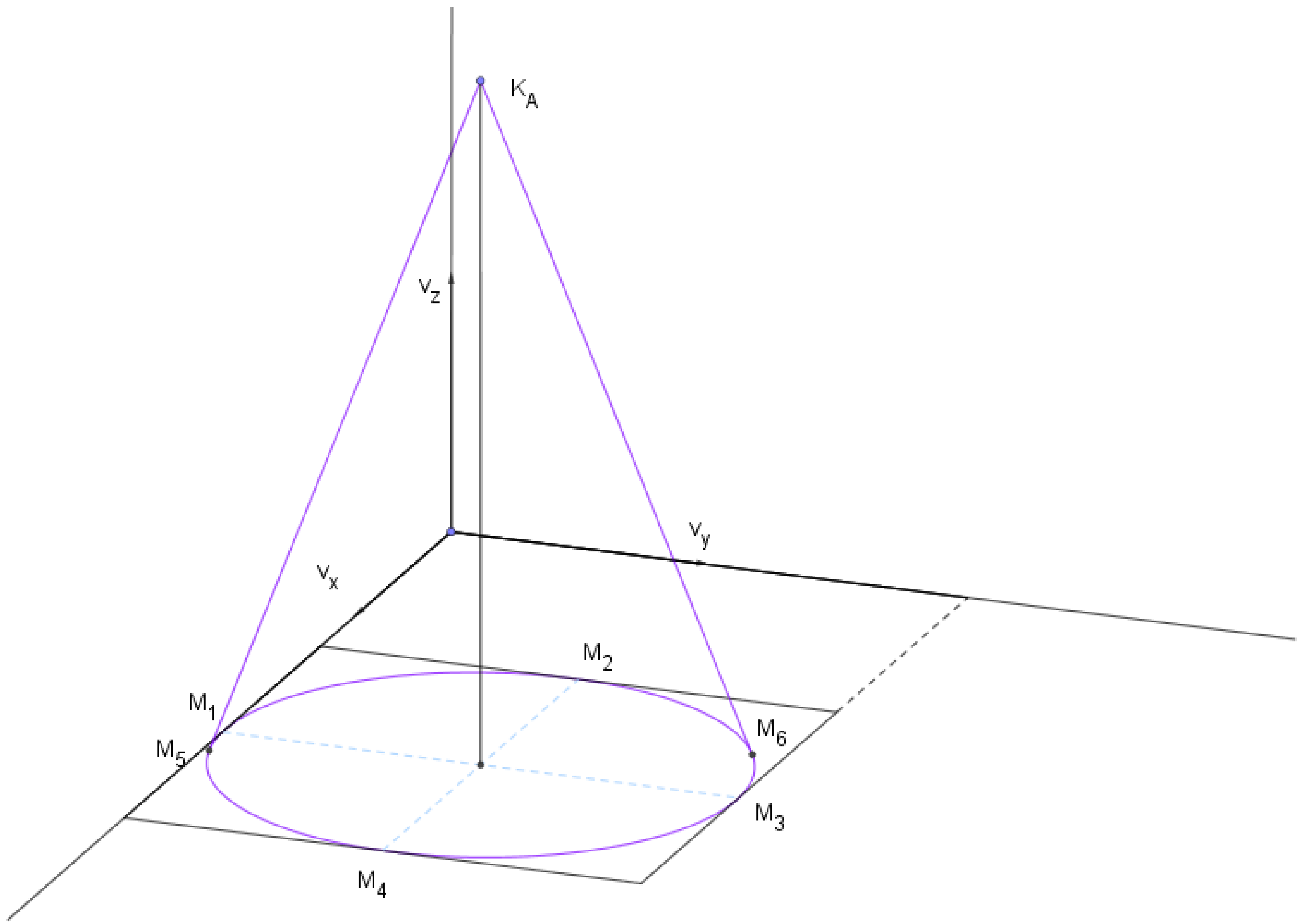
Το αξονομετρικό του κώνου

Έχουμε την πρώτη και τη δεύτερη προβολή ενός κώνου οπως στο παρακάτω σχήμα. Εγγράφουμε την βάση του σε ένα τετράγωνο.



Σχήμα 21

Για το αξονομετρικό μηχανικών του κώνου (μωβ χρώμα) φέρουμε τις εφαπτόμενες στην βάση του κώνου απο το αξονομετρικό σημείο K_A της κορυφής χρησιμοποιώντας την ευθεία Pascal.

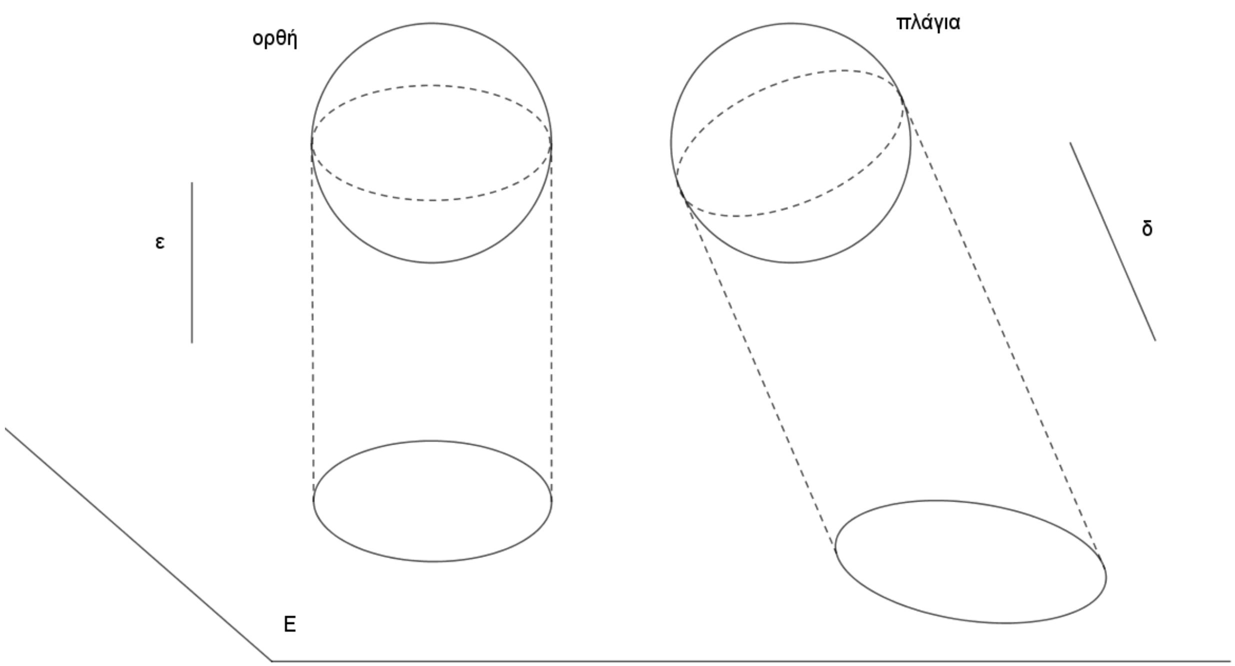


Σχήμα 22

Ασκήσεις

1. Να σχεδιάσετε το αξονομετρικό του κώνου για τις περιπτώσεις της ισομετρίας, μετωπικής και οριζόντιας Cavaliere.
2. Να σχεδιάσετε το αξονομετρικό του κυλίνδρου για τις ορθές αξονομετρίες. Θα χρειαστείτε το σχήμα 20β.

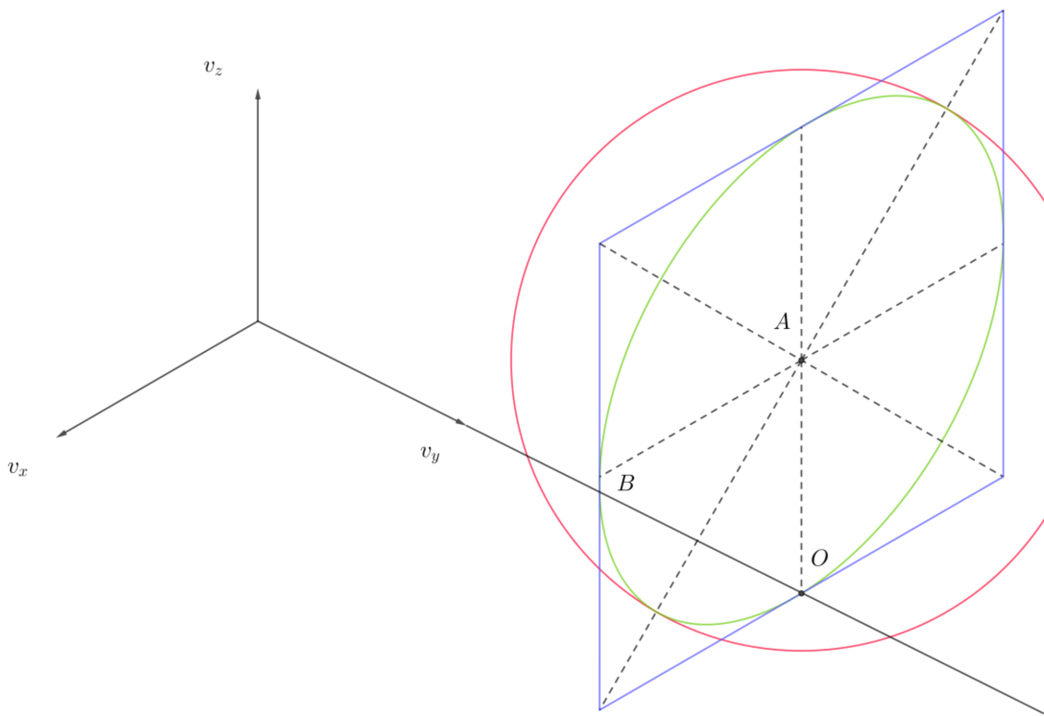
Το αξονομετρικό της σφαίρας



Σχήμα 23

Ισομετρική αξονομετρία για την σφαίρα

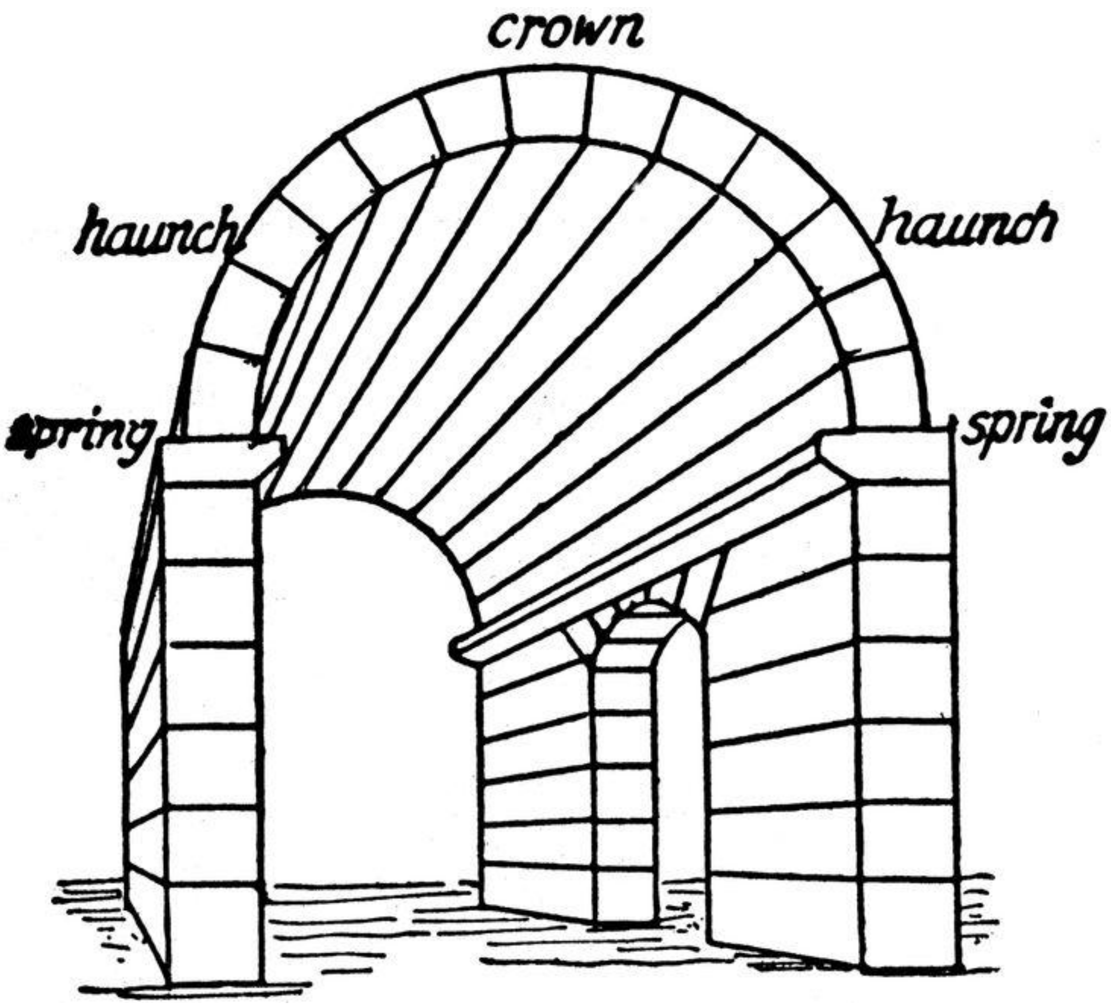
Θεωρούμε μια σφαίρα ακτίνας 1 εφαπτόμενη στο επίπεδο των x, y στο σημείο O του άξονα των y. Γνωρίζουμε ότι το αξονομετρικό της είναι ένας κύκλος επειδή η ισομετρική αξονομετρία προέρχεται από ορθή προβολή.
Εγγράφουμε την σφαίρα σε έναν κύβο με ακμές παράλληλες στους άξονες και σχεδιάζουμε το αξονομετρικό του κύβου. Στο παρακάτω σχήμα με μπλέ χρώμα, σχεδιάζουμε την τομή του κύβου με ένα επίπεδο που διέρχεται από το O και είναι κάθετο στον άξονα των y (μπλέ χρώμα). Η τομή της σφαίρας με αυτό το επίπεδο είναι μια έλλειψη (πράσινο χρώμα). Το αξονομετρικό της σφαίρας (κόκκινο χρώμα) είναι ο κύκλος με κέντρο το A.



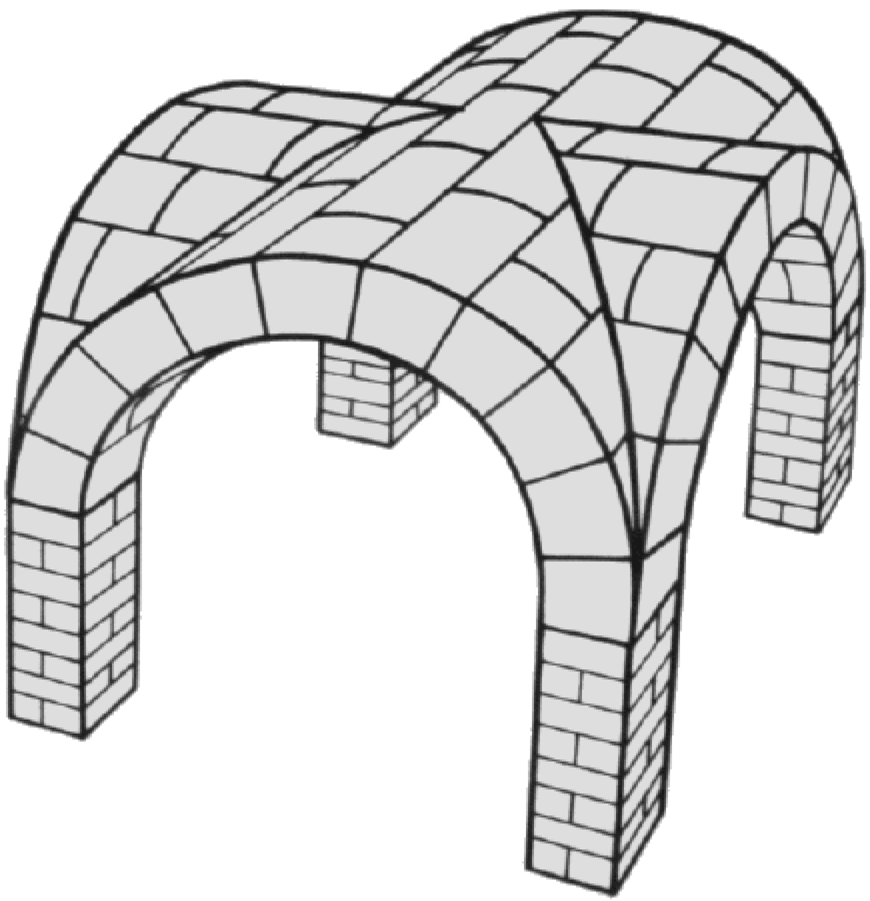
Σχήμα 24

Σταυροθόλια

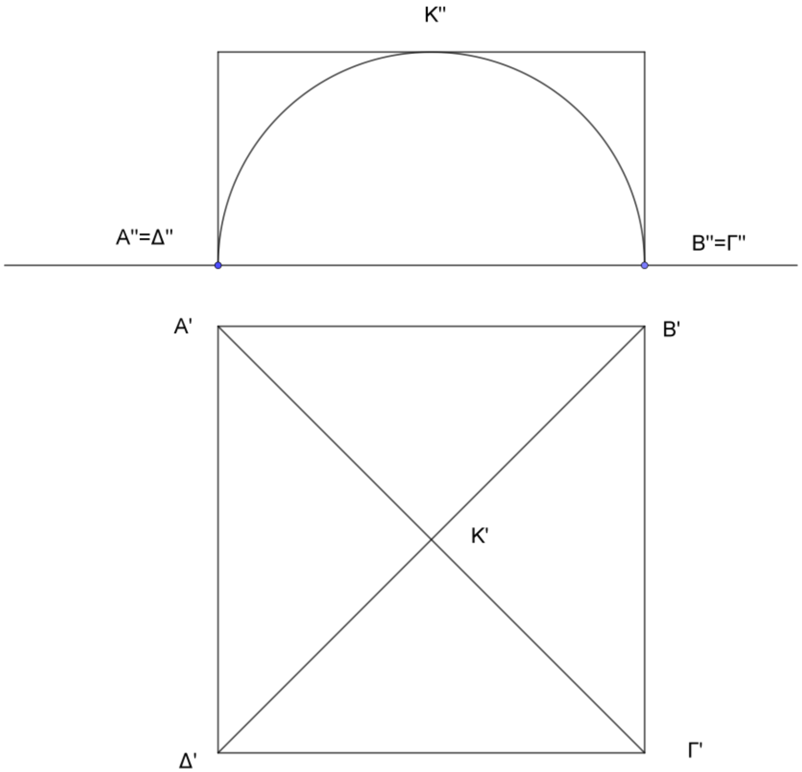
Ημικυλινδρικός θόλος (barrel vault)



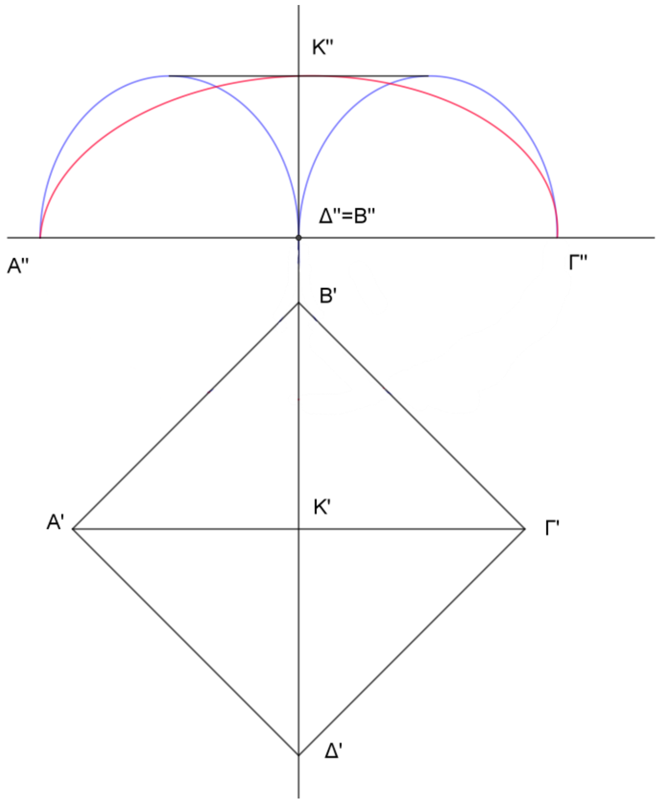
Ρωμαϊκό σταυροθόλιο (cross vault)



Στο χαρτί σχεδίασης έχουμε:



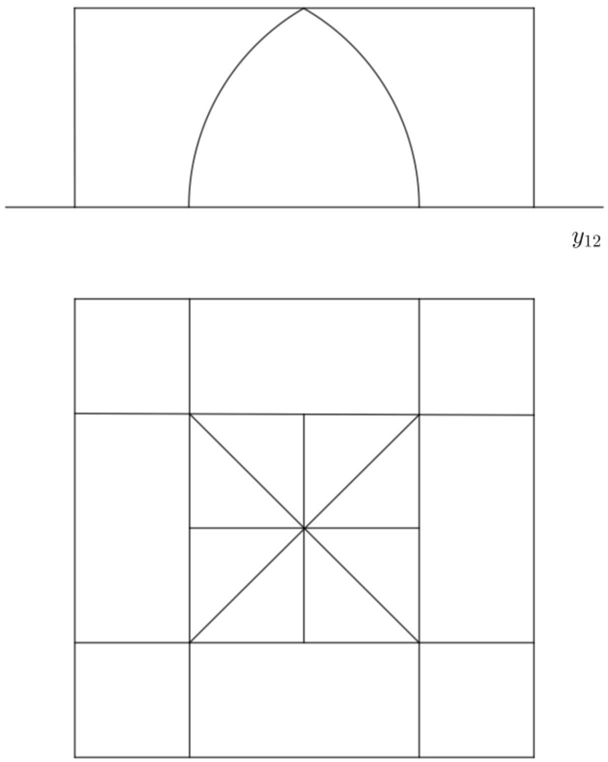
Σχήμα 25



Σχήμα 26

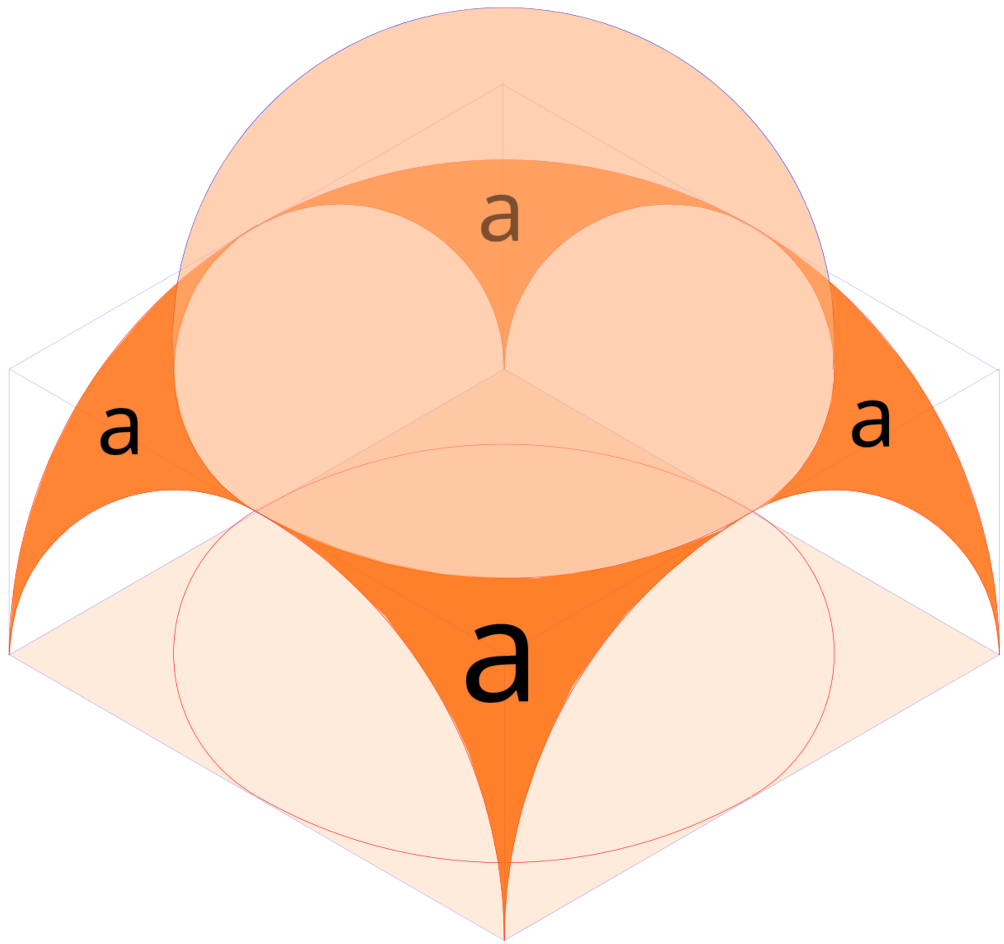
Γοτθικό σταυροθόλιο

https://www.pinterest.fr/pin/508625351646049810/visual-search/

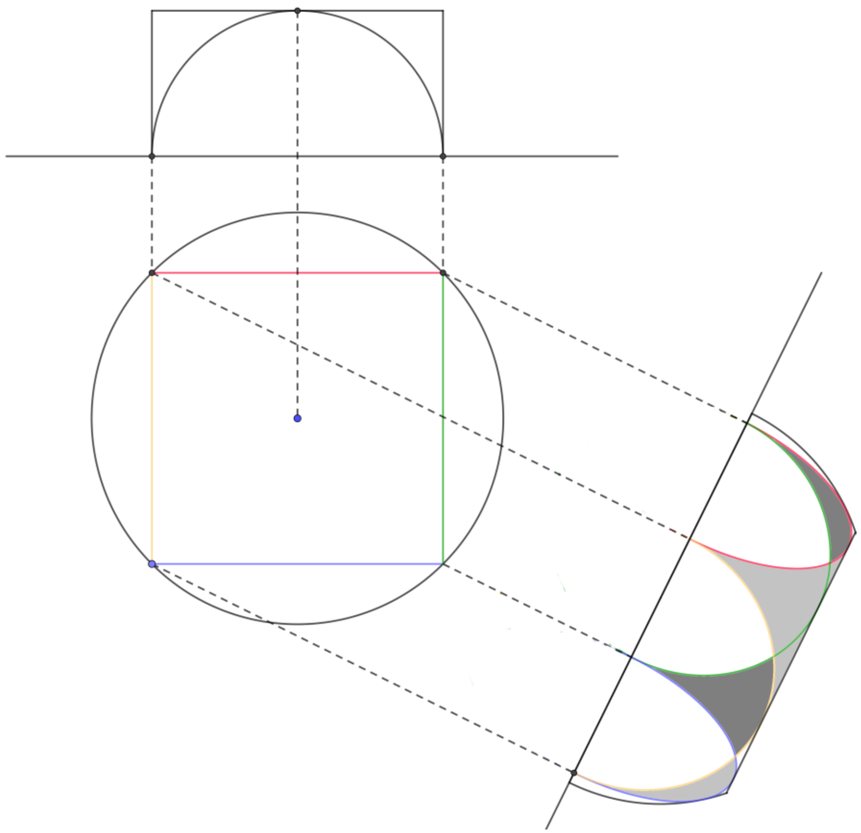


Σχήμα 27

Θόλος επί λοφίων



https://www.britannica.com/technology/pendentive



Σχήμα 28

https://architecturaltravels.wordpress.com/2012/03/10/dome/