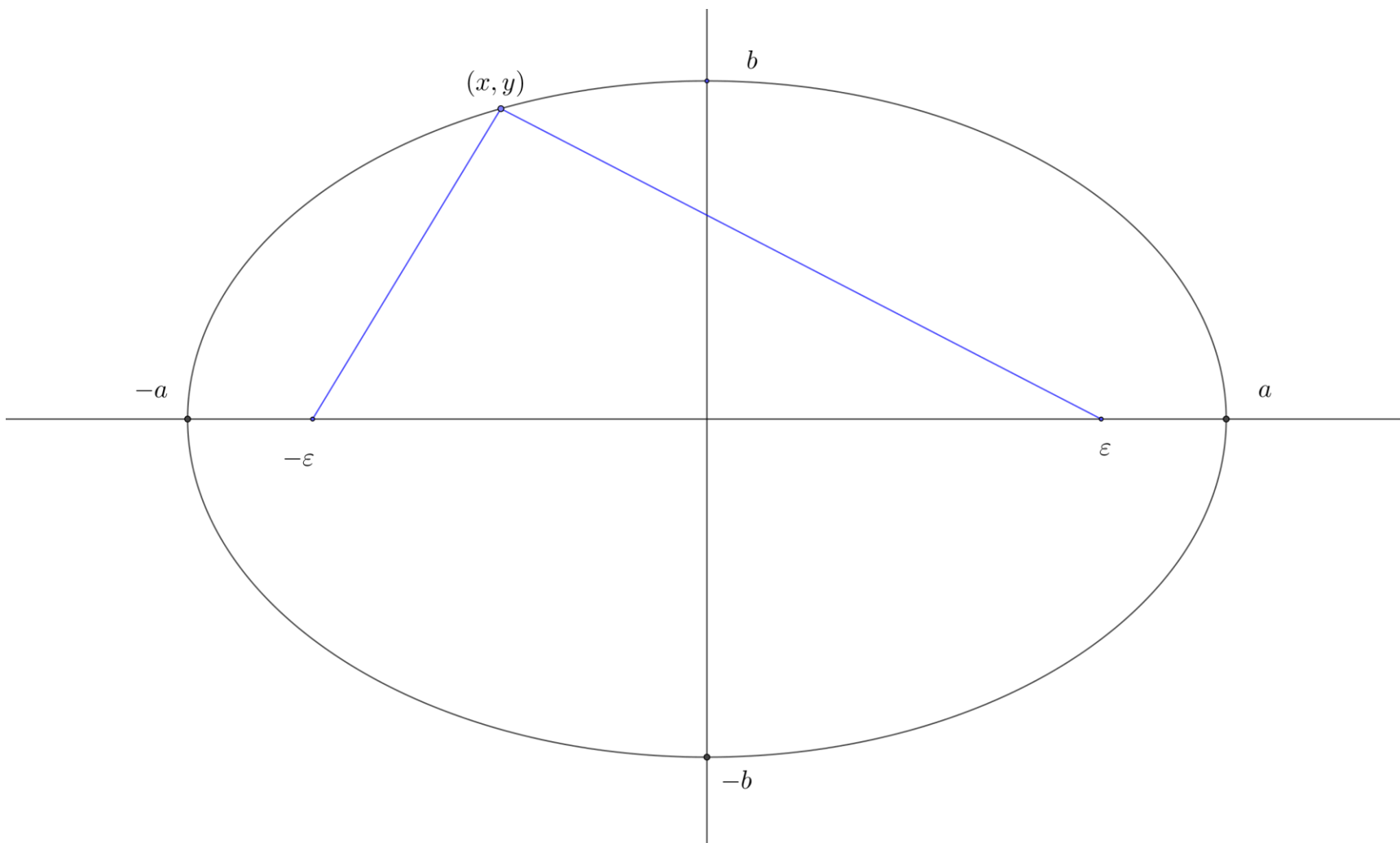


Κωνικές τομές, η έλλειψη

Ορισμός. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δοσμένα σημεία E_1 και E_2 είναι σταθερό λέγεται έλλειψη. Τα σημεία E_1 και E_2 λέγονται εστίες τις έλλειψης. Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα E_1 και E_2 λέγεται κέντρο τις έλλειψης.

Έστω ότι $E_1 = (-\varepsilon, 0)$ και $E_2 = (0, \varepsilon)$. Το σημείο (x, y) βρίσκεται στην έλλειψη αν η απόστασή του από το E_1 προστιθέμενη στην απόστασή του από το E_2 είναι σταθερή, έστω $2a$, με $a > \varepsilon$, δηλαδή

$$\sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2} = 2a .$$



Μετά από απλές πράξεις καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \varepsilon^2} = 1.$$

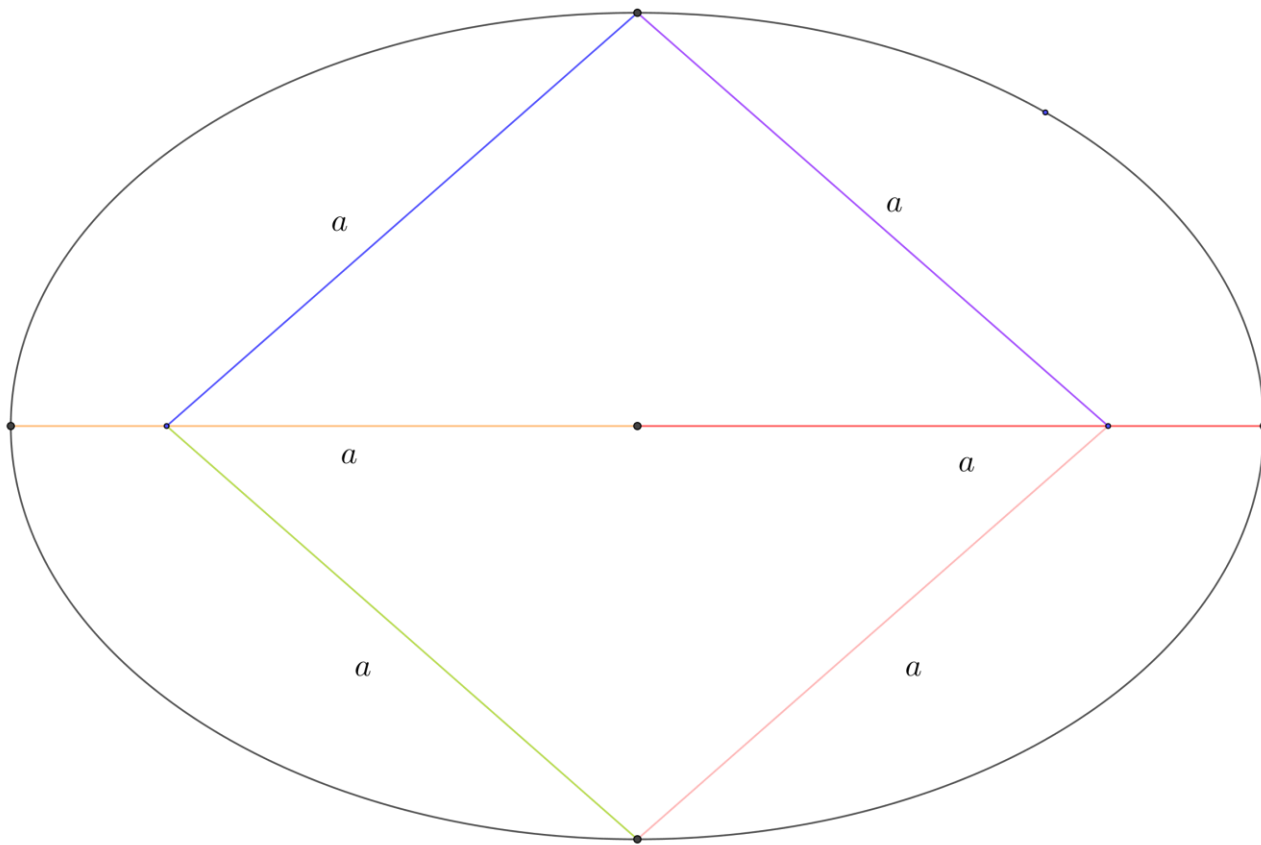
Θέτουμε $b^2 = a^2 - \varepsilon^2 < a^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(a, 0)$ και $(-a, 0)$ λέγεται μεγάλος άξονας της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, b)$ και $(0, -b)$ λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης.

Παρατηρήστε ότι ο μικρός και ο μεγάλος άξονας είναι κάθετοι.

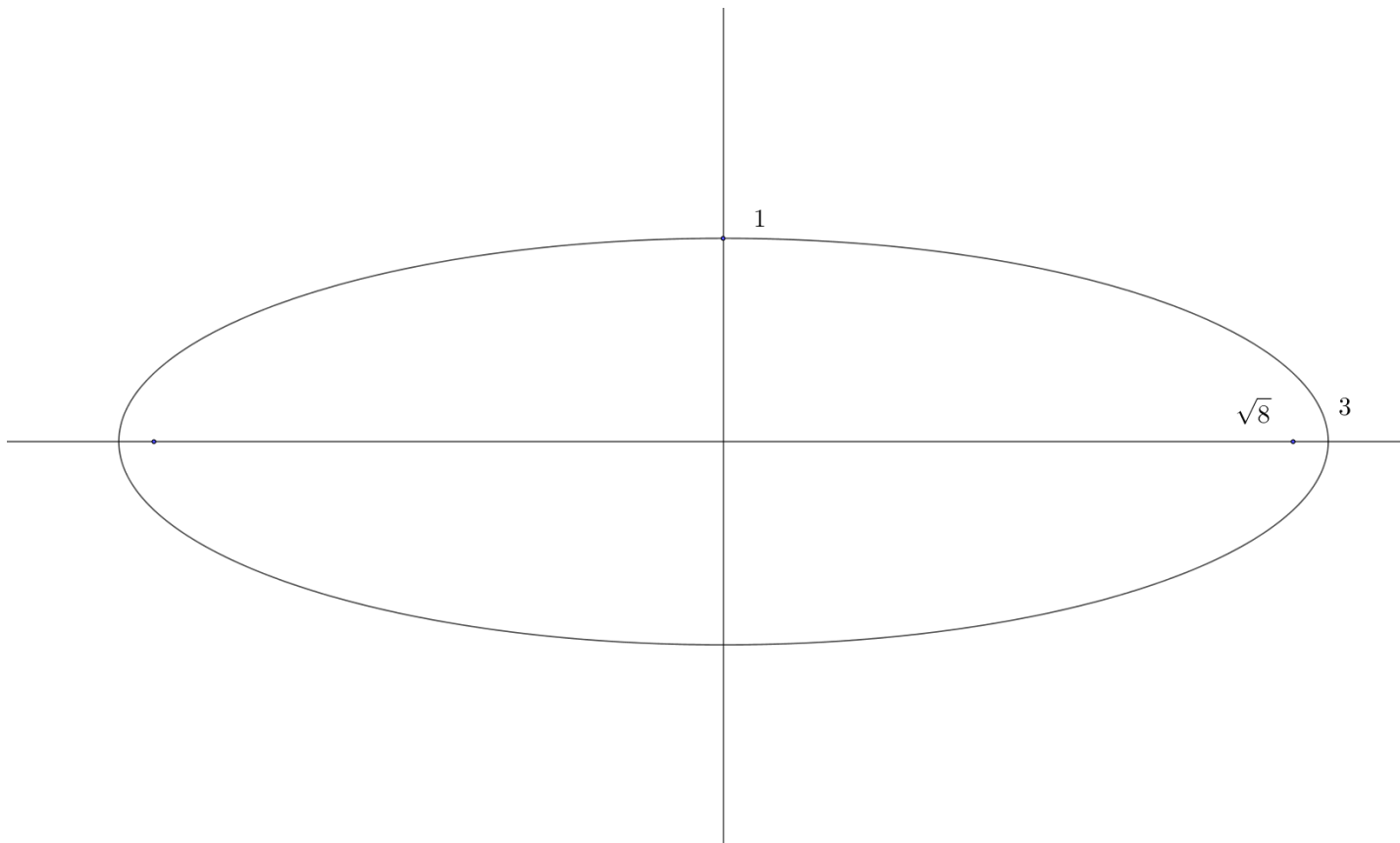
Στο παρακάτω σχήμα τα χρωματισμένα ευθύγραμμα τμήματα έχουν μήκος a . Άρα αν γνωρίζουμε τους άξονες της έλλειψης τότε εύκολα εντοπίζουμε τις εστίες της.



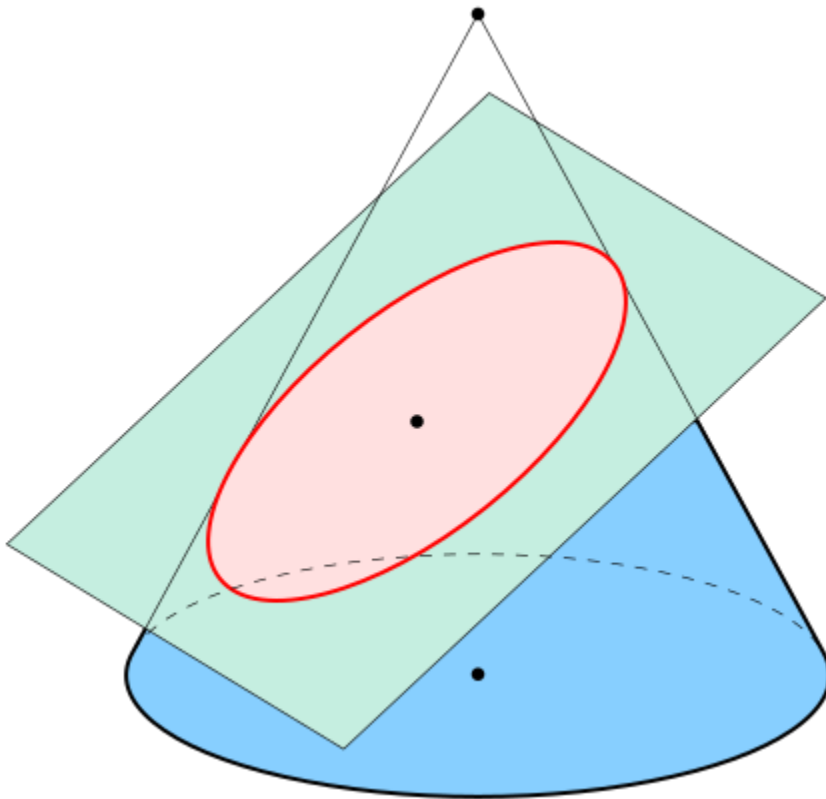
Παράδειγμα. Η έλλειψη

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

δίνεται στο παρακάτω σχήμα

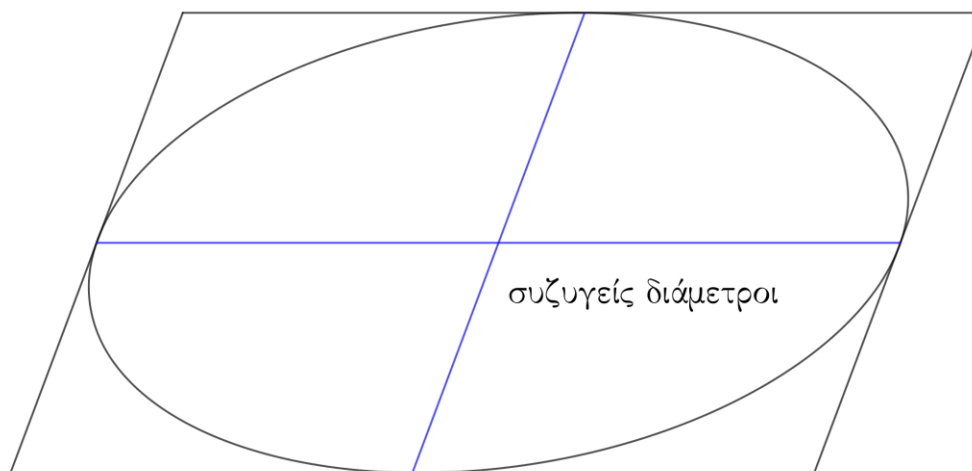
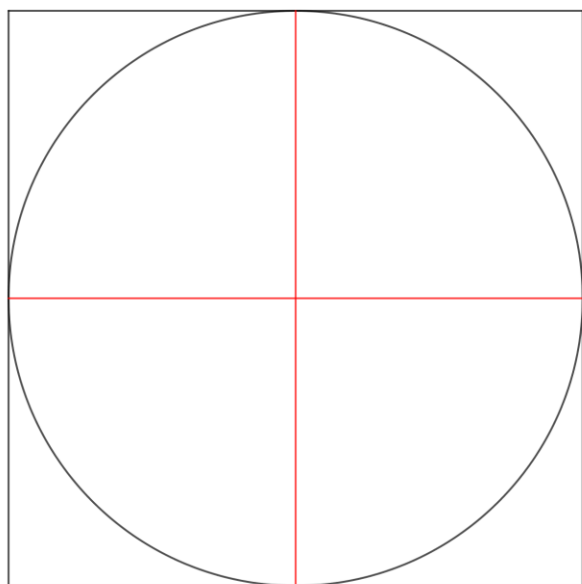


Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(-3, 0)$ και $(3, 0)$ είναι ο μεγάλος άξονας, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(0, 1)$ και $(0, -1)$ είναι ο μικρός άξονας, το κέντρο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Η σχέση $c^2 = a^2 - b^2$ δίνει $c = \sqrt{8}$, οπότε οι εστίες είναι τα σημεία $(-\sqrt{8}, 0)$, $(\sqrt{8}, 0)$.
Η τομή μεταξύ ενός κώνου και ενός επιπέδου είναι μια έλλειψη:



Wikipedia

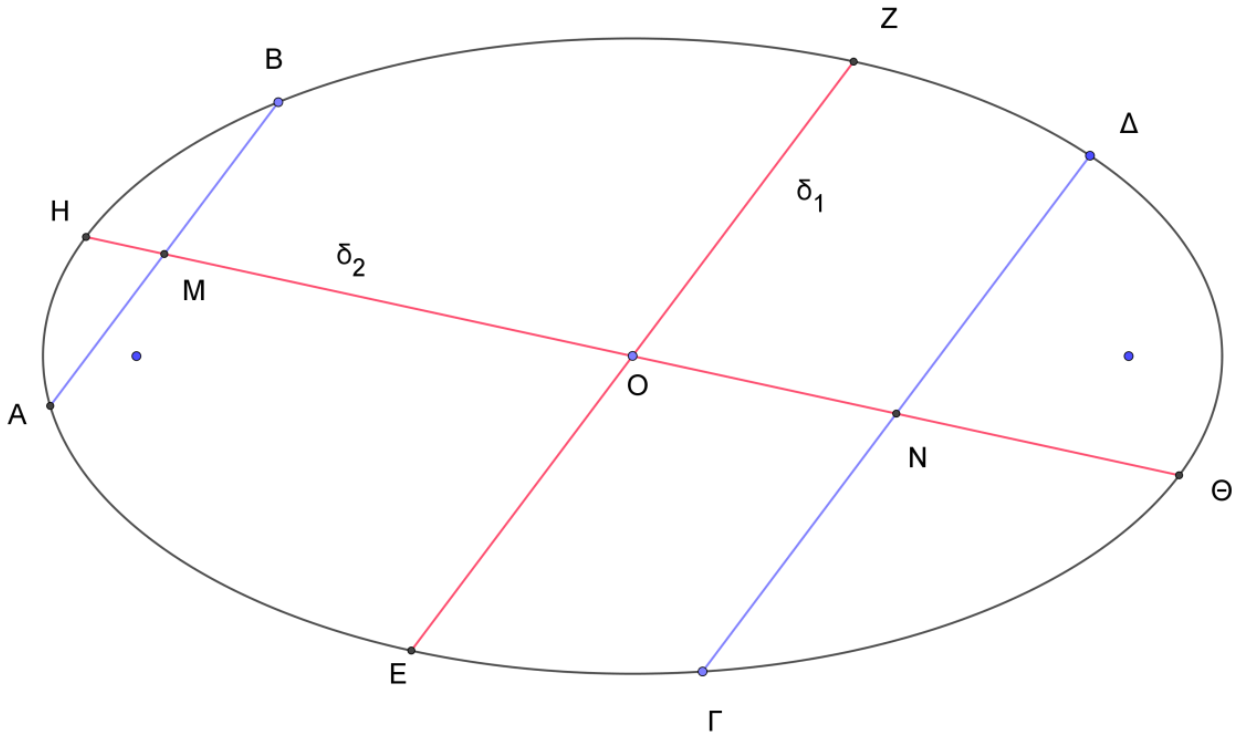
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε έναν κύκλο και το περιγεγραμμένο σε αυτόν τετράγωνο. Η προβολή του κύκλου σε ένα επίπεδο είναι μια έλλειψη, η προβολή του τετραγώνου σε αυτό το επίπεδο είναι ένα παραλληλόγραμμο στα μέσα των πλευρών του οποίου εφάπτεται η έλλειψη. Οι προβολές των δύο κάθετων διαμέτρων του κύκλου δεν είναι απαραίτητα οι άξονες της έλλειψης, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα επειδή δεν είναι κάθετοι μεταξύ τους.



Είναι όμως συζυγείς διάμετροι όπως θα δούμε παρακάτω.

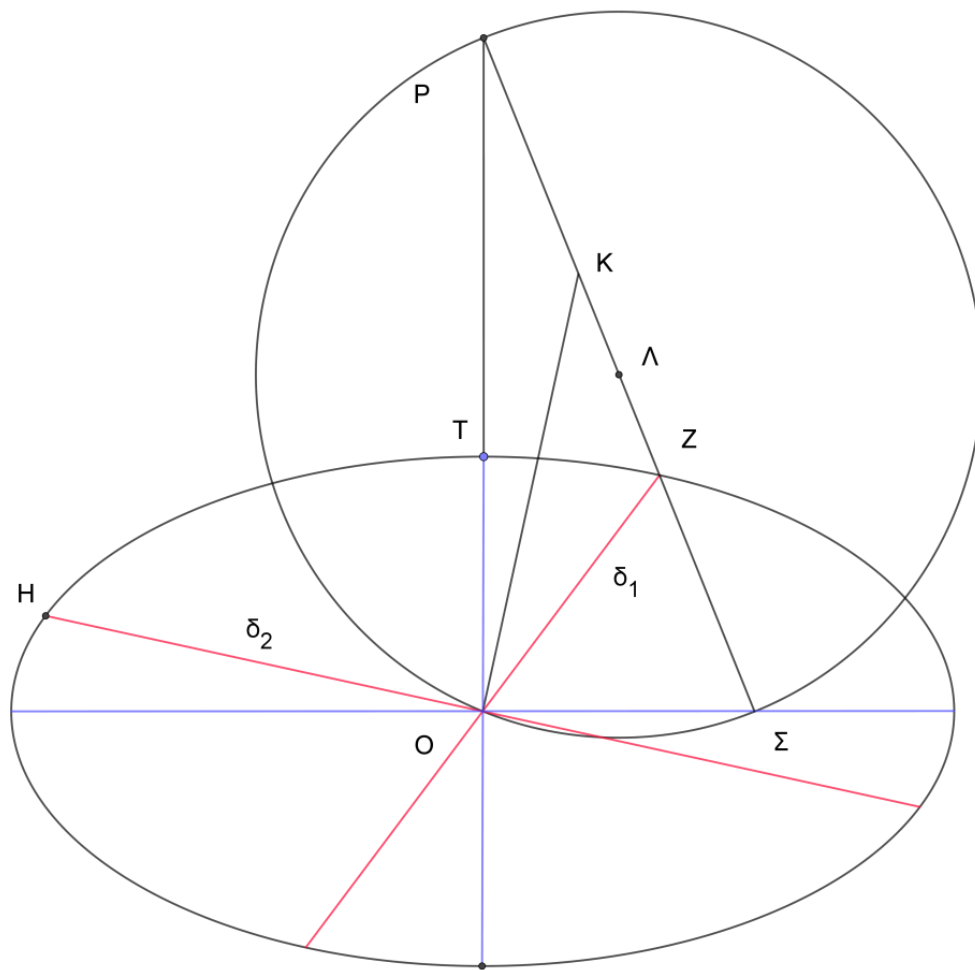
Δύο διάμετροι μιας έλλειψης δ_1, δ_2 λέγονται συζυγείς αν τα μέσα των χορδών που είναι παράλληλες προς την δ_1 βρίσκονται στην δ_2 .

Στο παρακάτω σχήμα οι χορδές AB, ΓΔ είναι παράλληλες προς την δ_1 . Τα μέσα M, N των χορδών βρίσκονται στην δ_2 .



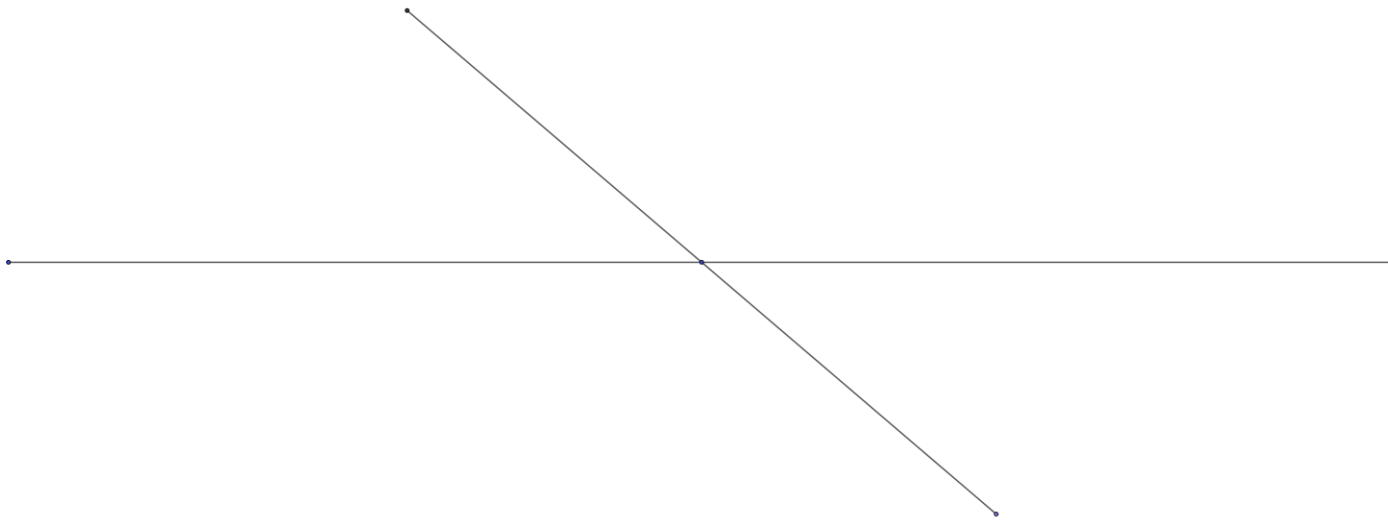
Η μέθοδος του Rytz

Θα δούμε τώρα πως εντοπίζουμε τους κύριους άξονες μιας έλλειψης (μπλέ χρώμα) όταν γνωρίζουμε δύο συζυγείς διαμέτρους της δ_1, δ_2 (κόκκινο χρώμα).

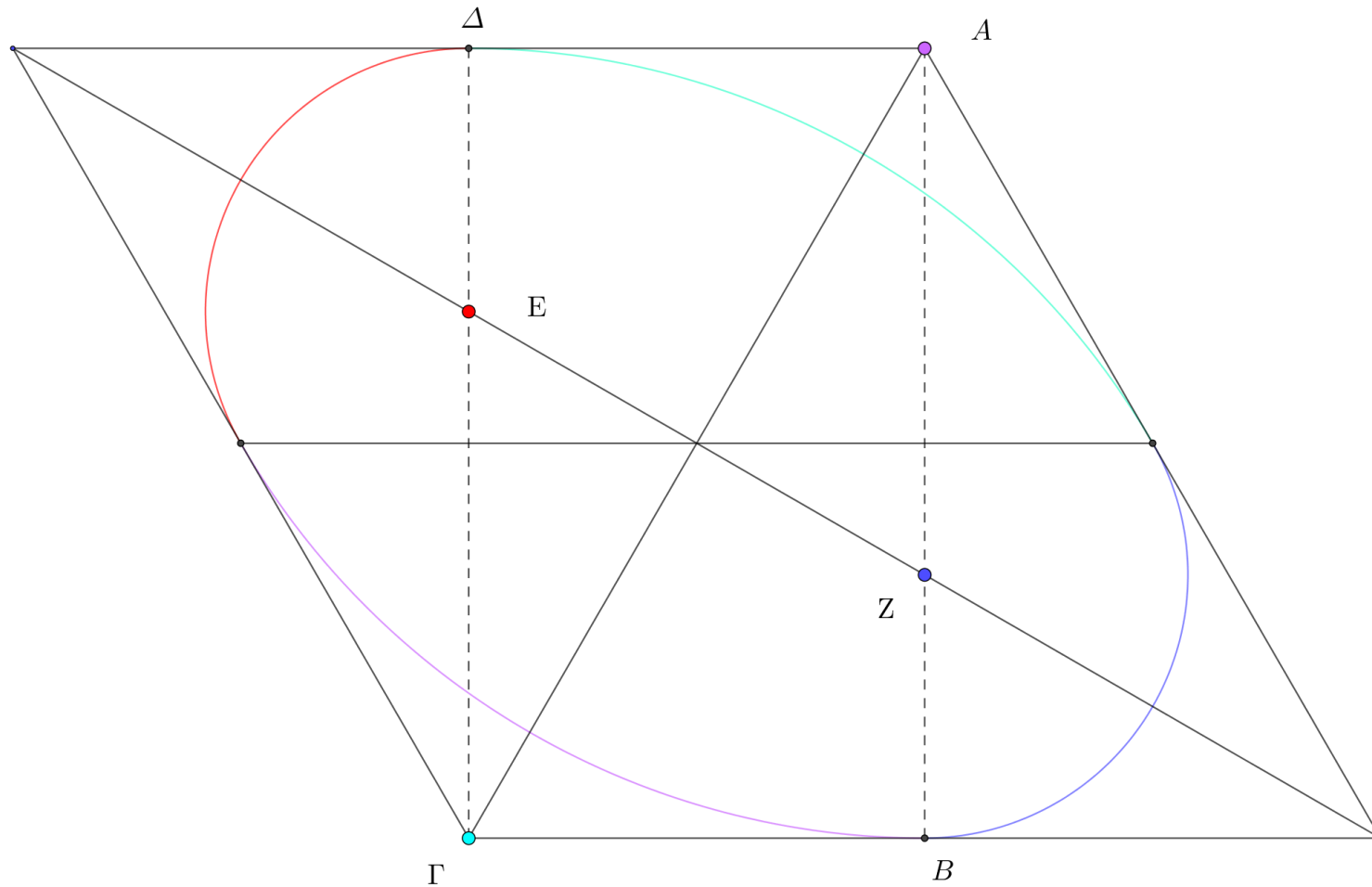


Απο το O φέρνουμε κάθετο στην δ_2 και επ'αυτής παίρνουμε σημείο K τέτοιο ώστε $KO = OH$. Με κέντρο το μέσον Λ της KZ και ακτίνα ΛO σχεδιάζουμε κύκλο ο οποίος τέμνει την ευθεία που διέρχεται απο τα K, Z στα σημεία P και Σ . Οι κύριοι άξονες της έλλειψης (μπλέ χρώμα) βρίσκονται πάνω στις ευθείες που διέρχονται από τα O, Σ και τα O, P . Ο μεγάλος άξονας της έλλειψης έχει μήκος $2 \times PZ$ και ο μικρός $2 \times Z\Sigma$.

Άσκηση. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι συζυγείς διάμετροι μιας έλλειψης. Να σχεδιάσετε τους άξονες της έλλειψης με την μέθοδο του Rytz.

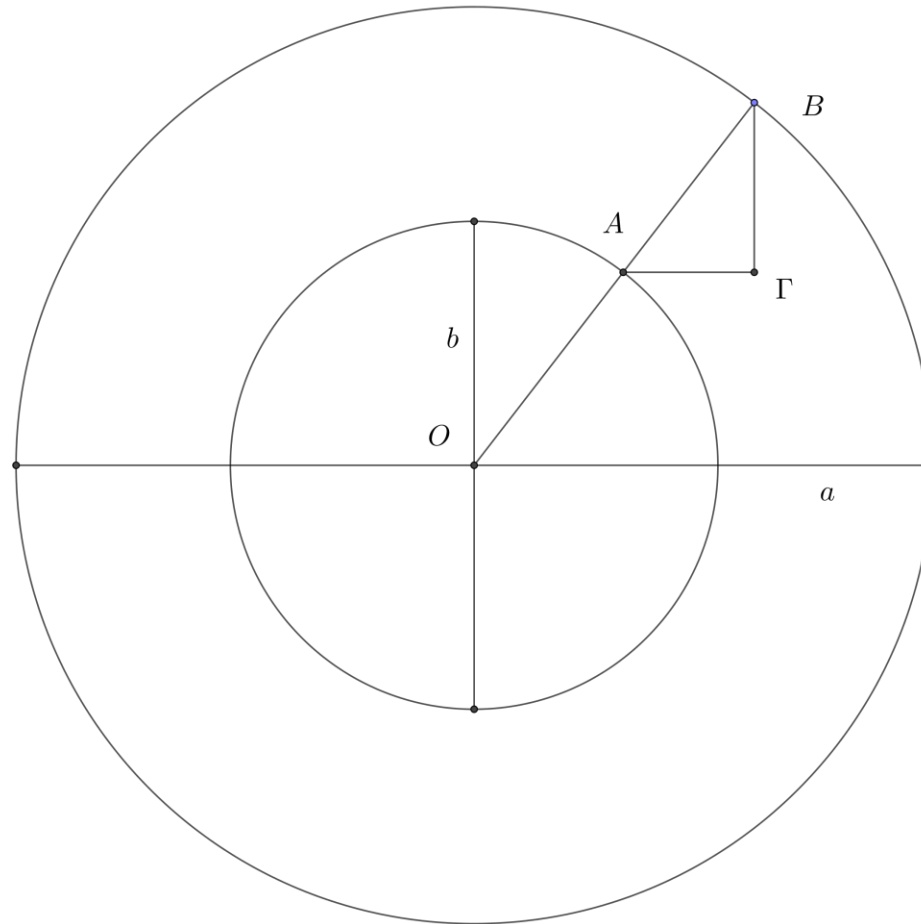


Όταν το παραλληλόγραμμο είναι ένας ρόμβος με μια από τις γωνίες του να είναι 120° , τότε μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα οβάλ (4 τόξα διαφορετικών κύκλων) αντί της έλλειψης:

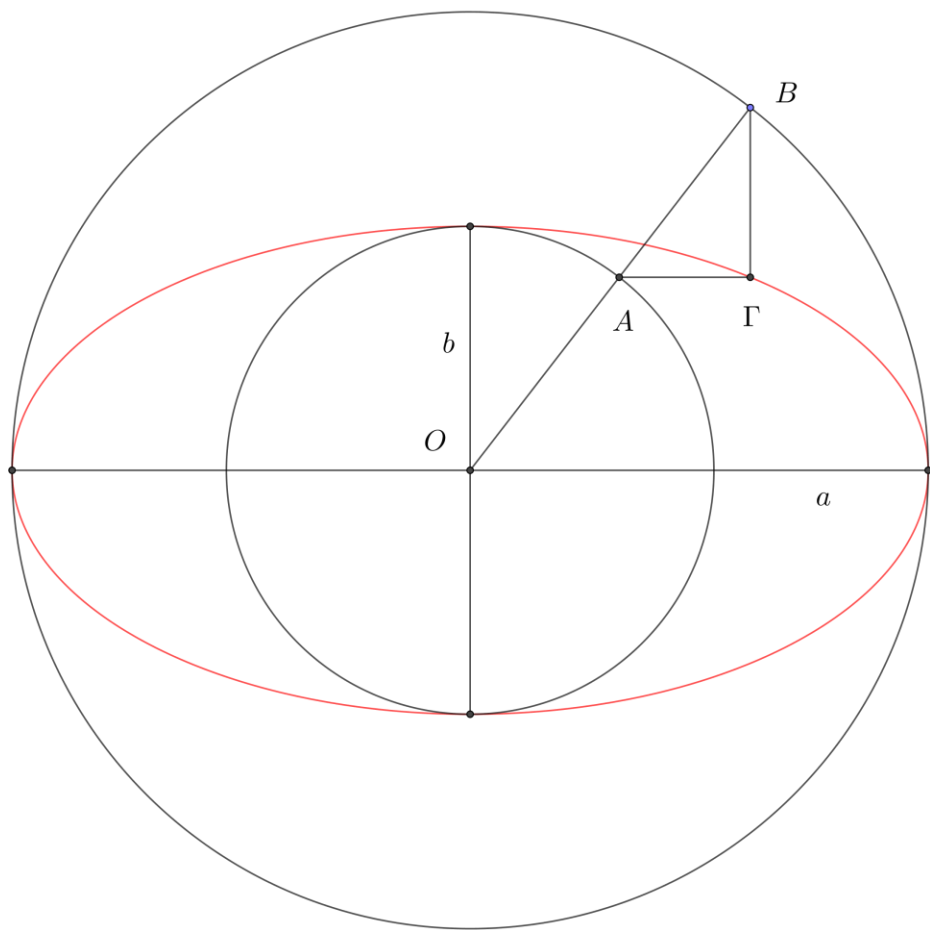


Το κέντρο κάθε ενός από τους 4 κύκλους και το αντίστοιχο τόξο του είναι σχεδιασμένα με το ίδιο χρώμα.

Πως βρίσκουμε τα σημεία μιας έλλειψης όταν γνωρίζουμε τους άξονές της: Η μέθοδος του de la Hire.



Σχεδιάζουμε δύο κύκλους με κέντρο O και ακτίνες a, b . Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο B στον μεγάλο κύκλο και σχεδιάζουμε την ακτίνα OB , αυτή τέμνει τον μικρό κύκλο στο A . Από το B φέρνουμε κάθετη στον μεγάλο άξονα και από το A κάθετη στον μικρό άξονα. Το σημείο τομής τους Γ είναι πάνω στην έλλειψη.



Εφαπτόμενες ευθείες σε μια έλλειψη

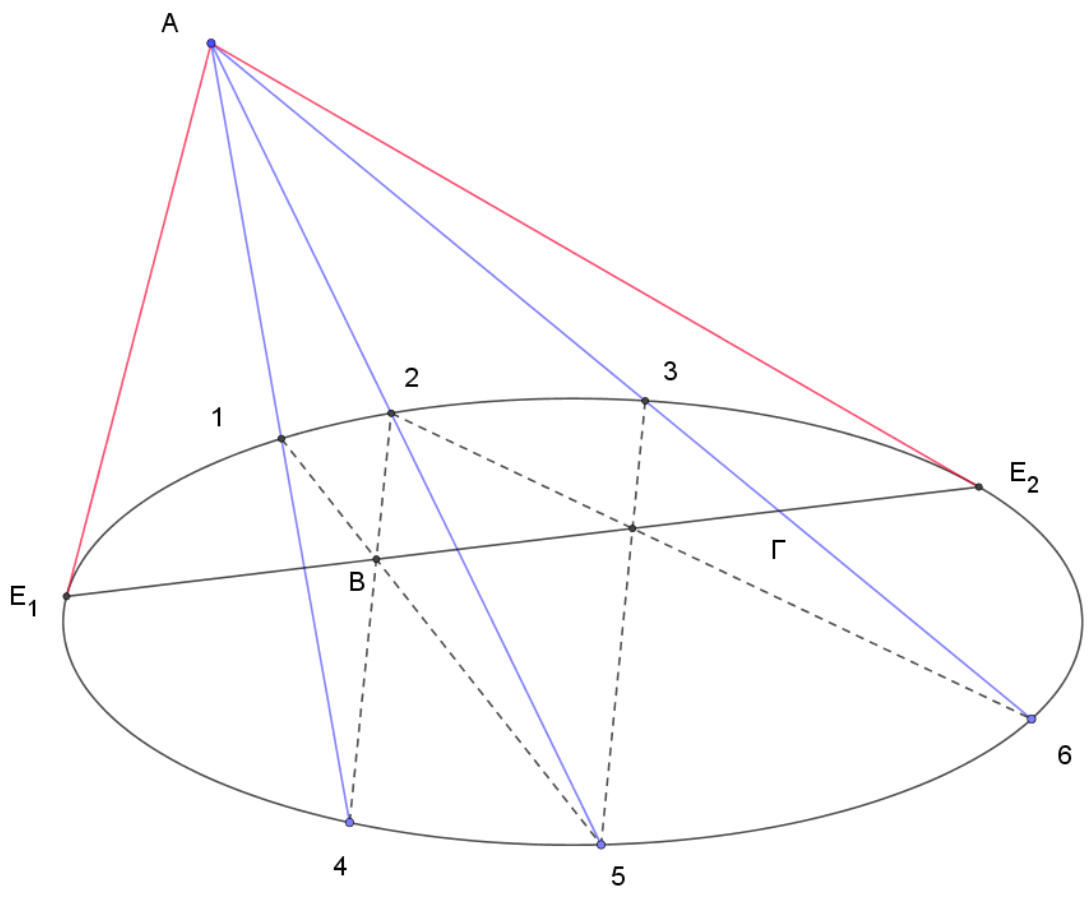
Θεωρούμε μια έλλειψη και ένα σημείο A εκτός αυτής. Για να σχεδιάσουμε τις ευθείες που διέρχονται από το A και εφάπτονται στην έλλειψη ακολουθούμε τα παρακάτω:

Απο το A σχεδιάζουμε τρεις ευθείες (μπλέ χρώμα) οι οποίες την τέμνουν στα σημεία απο 1 έως 6.

Με B, Γ σημειώνουμε τα σημεία τομής των ευθυγράμμων τμημάτων 15 με 42 και 26 με 35.

Η ευθεία που διέρχεται από τα B, Γ (λέγεται ευθεία Pascal) τέμνει την έλλειψη στα σημεία E_1, E_2 .

Τότε τα ευθύγραμμα τμήματα AE_1, AE_2 (κόκκινο χρώμα) εφάπτονται στην έλλειψη.



Δίνεται μια ευθεία ϵ και μια έλλειψη. Θα σχεδιάσουμε τις ευθείες που είναι παράλληλες στην ϵ και εφάπτονται στην έλλειψη.

Σχεδιάζουμε τρεις ευθείες παράλληλες στην ϵ οι οποίες τέμνουν την έλλειψη στα σημεία από 1 έως 6. Οι ευθείες 14 και 23 τέμνονται στο σημείο 7, οι ευθείες 36 και 45 τέμνονται στο σημείο 8. Τα σημεία τομής της ευθείας που διέρχεται από τα 7, 8 τέμνουν την έλλειψη στα σημεία A, B. Οι εφαρτόμενες στα σημεία αυτά είναι παράλληλες στην ϵ .

