# ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

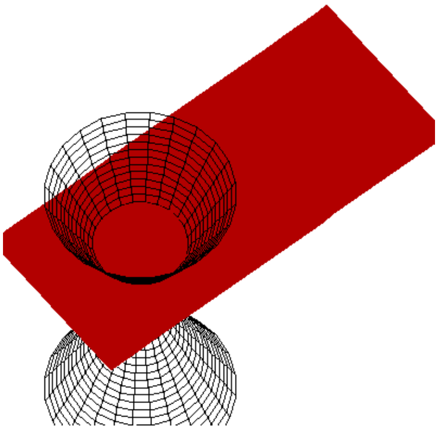
Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι η μελέτη των κωνικών τομών που περιγράφονται από την δευτεροβάθμια εξίσωση δύο μεταβλητών

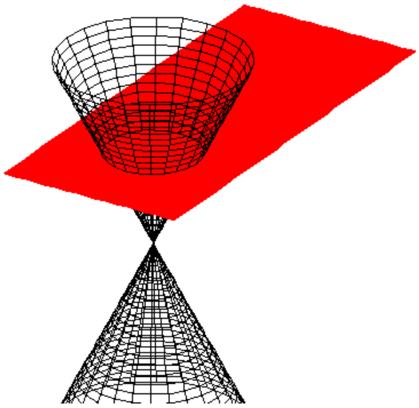
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Θεωρείται ότι οι κωνικές τομές ανακαλύφθηκαν από τον Μέναιχμο c.375-325 πΧ, δάσκαλο του Μεγάλου Αλεξάνδρου. Μελετήθηκαν και πήραν τα σημερινά τους ονόματα από τον Απολλώνιο c.262-190 πΧ.

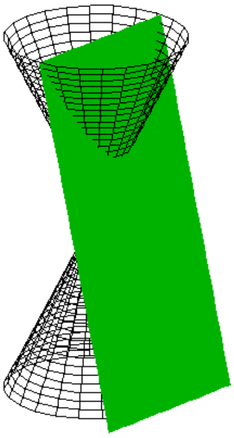
Οι κωνικές τομές είναι καμπύλες που προέρχονται από την τομή ενός επιπέδου και ενός κώνου. Δείτε τα παρακάτω σχήματα.

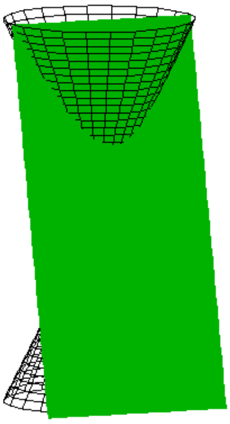
**Κύκλος**





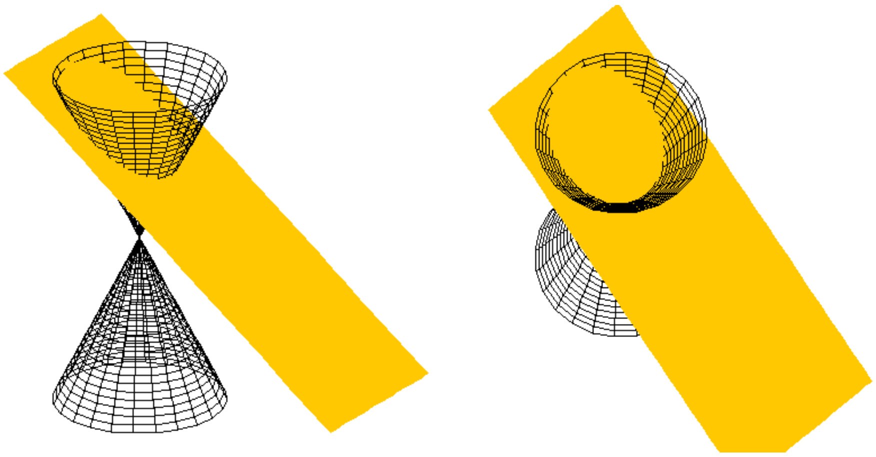
**Παραβολή**





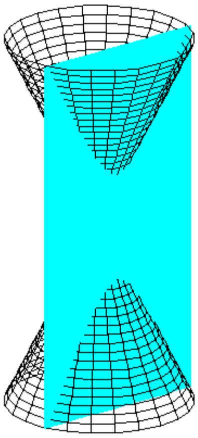
Γέφυρα Hulme Arch, Μάντσεστερ (φωτο απο wikipedia)

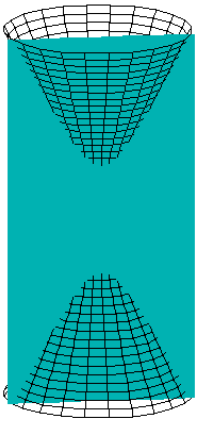
**Έλλειψη**



Πλανητάριο Tycho Brahe, Κοπεγχάγη  (φωτο απο wikipedia)

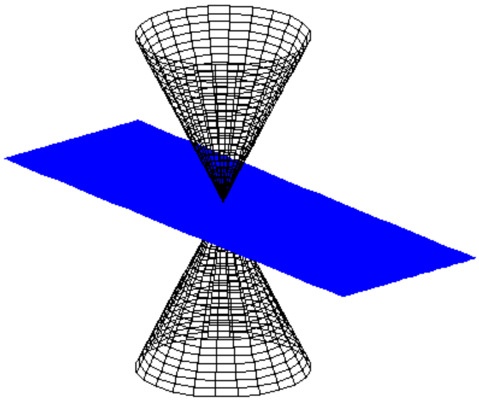
**Υπερβολή**



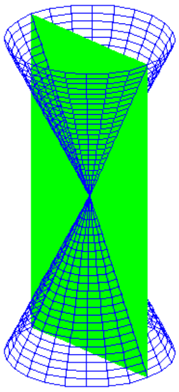


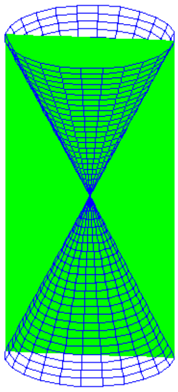
McDonnell Πλανητάριο, Saint Louis Science Center (υπερβολοειδές)
(φωτο απο wikipedia)

**<u>Σημείο</u>**



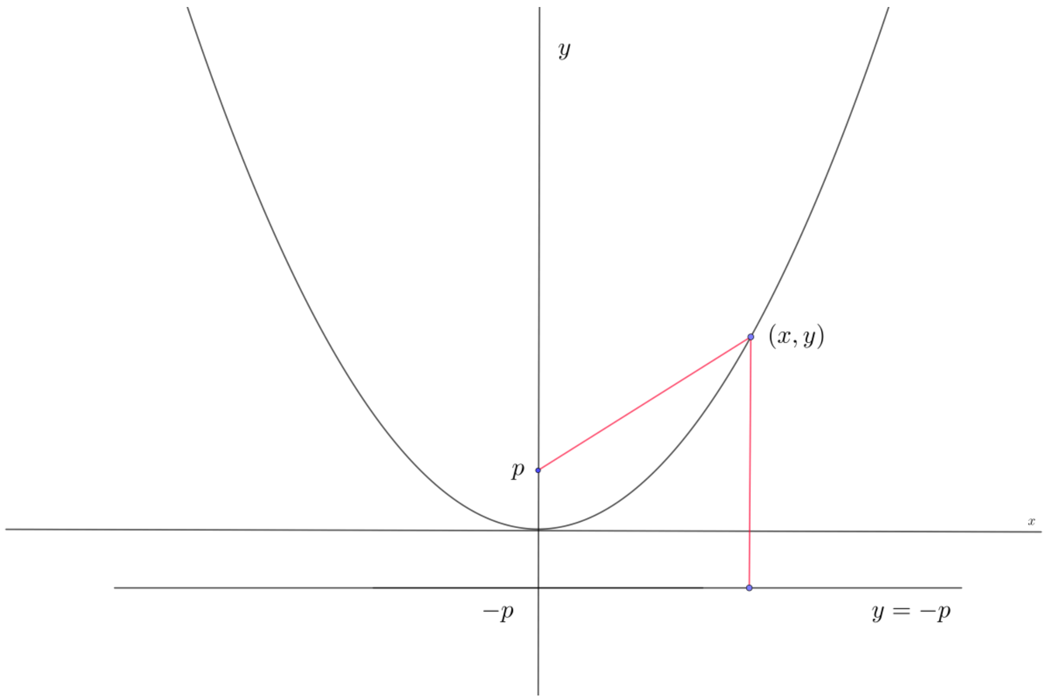
**<u>Δύο ευθείες</u>**





# <u>Η Παραβολή</u>

<u>Ορισμός.</u> Παραβολή ονομάζεται το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από μία ευθεία (που λέγεται <u>διευθετούσα</u>) και από ένα σημείο εκτός της ευθείας (που λέγεται <u>εστία</u>).
Ας υποθέσομε ότι η διευθετούσα περιγράφεται από την εξίσωση $y = -p$ και η εστία είναι το σημείο $(0, p)$. Αν το σημείο $(x, y)$ βρίσκεται στην παραβολή, τότε η απόστασή του από την εστία είναι $\sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ και η απόστασή του από την διευθετούσα είναι $|y-(-p)| = |y+p|$:




Άρα

$$\sqrt{x^2+(y-p)^2}=|y+p|.$$

Μετά από απλές πράξεις παίρνομε την εξίσωση

$$\boxed{x^2=4py\,,}$$

η οποία περιγράφει την παραβολή με διευθετούσα την ευθεία $y$ = -$p$ και εστία το σημείο *(0, p).*
Ομοίως, η παραβολή με διευθετούσα $x$ = -$p$ και εστία *(p, 0)* έχει εξίσωση

$$\boxed{y^2=4px\,.}$$

Ο <u>άξονας συμμετρίας</u> μιας παραβολής είναι η ευθεία που διέρχεται από την εστία της και είναι κάθετη στην διευθετούσα. Το σημείο τομής μιας παραβολής με τον άξονα συμμετρίας της λέγεται <u>κορυφή</u>.

## <u>Η Έλλειψη</u>

<u>Ορισμός.</u> Το σύνολο των σημείων του επιπέδου το άθροισμα των αποστάσεων των οποίων από δύο δοσμένα σημεία $E_1$ και $E_2$ είναι σταθερό λέγεται <u>έλλειψη</u>.

Από την ταινία Agora:

[https://www.youtube.com/watch?v=3OgSAr6IMwQ](https://www.youtube.com/watch?v=3OgSAr6IMwQ)

Τα σημεία $E_1$ και $E_2$ λέγονται εστίες τις έλλειψης. Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα $E_1$ και $E_2$ λέγεται κέντρο τις έλλειψης.
Έστω ότι $E_1 = (-\varepsilon, 0)$ και $E_2 = (0, \varepsilon)$. Το σημείο $(x, y)$ βρίσκεται σε μια έλλειψη αν η απόστασή του από το $E_1$ προστιθέμενη στην απόστασή του από το $E_2$ είναι σταθερή, έστω $2a$, με $a > \varepsilon$, δηλαδή

$$\sqrt{(x+\varepsilon)^2 + y^2} + \sqrt{(x-\varepsilon)^2 + y^2} = 2a .$$

Μετά από τις απλές πράξεις καταλήγομε στην εξίσωση

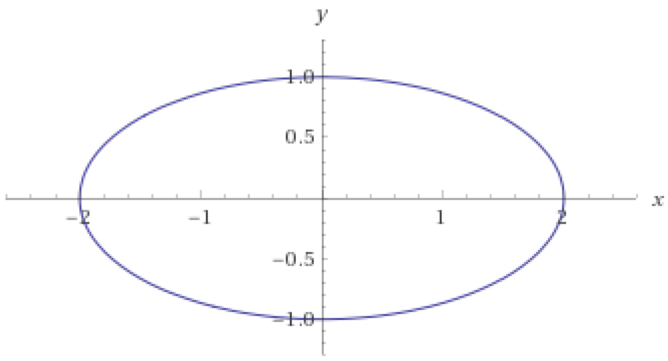
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - \varepsilon^2} = 1.$$

Θέτομε $b^2 = a^2 - \varepsilon^2 < a$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(\alpha, 0)$ και $(-\alpha, 0)$ λέγεται μεγάλος άξονας τις έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία $(0, b)$ και $(0, -b)$ λέγεται μικρός άξονας της έλλειψης.

Η έλλειψη $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα

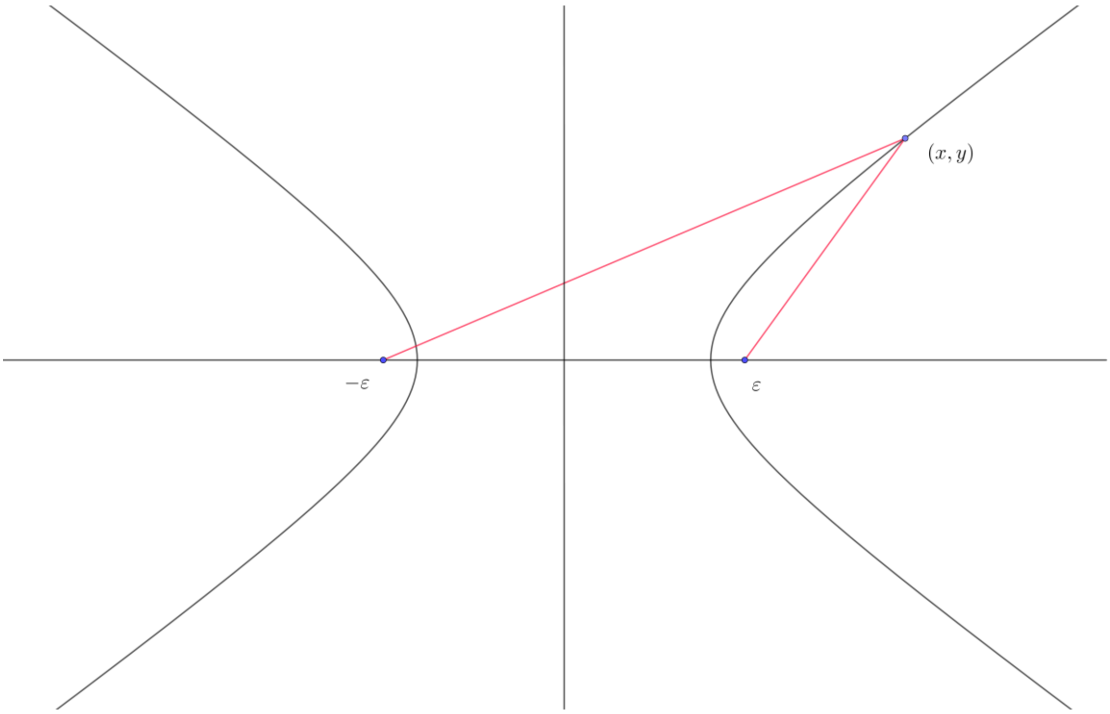



Το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(-2, 0)$ και $(2, 0)$ είναι ο μεγάλος άξονας, το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων $(0, 1)$ και $(0, -1)$ είναι ο μικρός άξονας, η αρχή των αξόνων είναι το κέντρο. Η σχέση $\varepsilon^2 = a^2 - b^2$ δίνει $\varepsilon = \sqrt{3}$ οπότε οι εστίες είναι τα σημεία $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$.

# **Η Υπερβολή**

<u>Ορισμός.</u> Το σύνολο των σημείων του επιπέδου η διαφορά των αποστάσεων των οποίων από δύο δοσμένα σημεία $E_1$ και $E_2$ είναι σταθερή λέγεται <u>υπερβολή</u>. Τα σημεία $E_1$ και $E_2$ λέγονται εστίες τις υπερβολής.

Έστω ότι $E_1 = (-\varepsilon, 0)$ και $E_2 = (0, \varepsilon)$. Το σημείο $(x, y)$ βρίσκεται στην υπερβολή αν η απόστασή του από το $E_1$ αφαιρούμενη από την απόστασή του από το $E_2$ είναι σταθερή ή αν η απόστασή του από το $E_2$ αφαιρούμενη από την απόστασή του από το $E_1$ είναι σταθερή, έστω $2a$:




οπότε

$$\sqrt{(x+\varepsilon)^2+y^2}-\sqrt{(x-\varepsilon)^2+y^2}=2a, \text{ ή}$$

$$\sqrt{(x-\varepsilon)^2+y^2}-\sqrt{(x+\varepsilon)^2+y^2}=2a.$$

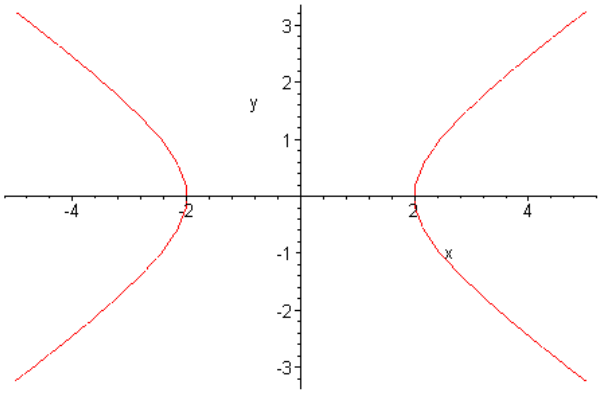
Μετά από απλές πράξεις καταλήγομε στην εξίσωση

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

όπου $b^2=\varepsilon^2-a^2$, $a<\varepsilon$.

Το μέσον του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα $E_1$ και $E_2$ λέγεται <u>κέντρο</u> τις υπερβολής. Τα σημεία *(a, 0)* και *(-a, 0)* λέγονται κορυφές της υπερβολής. Παρατηρείστε ότι η υπερβολή δεν τέμνει τον άξονα των y.

Η υπερβολή $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=1$ δίνεται στο παρακάτω σχήμα



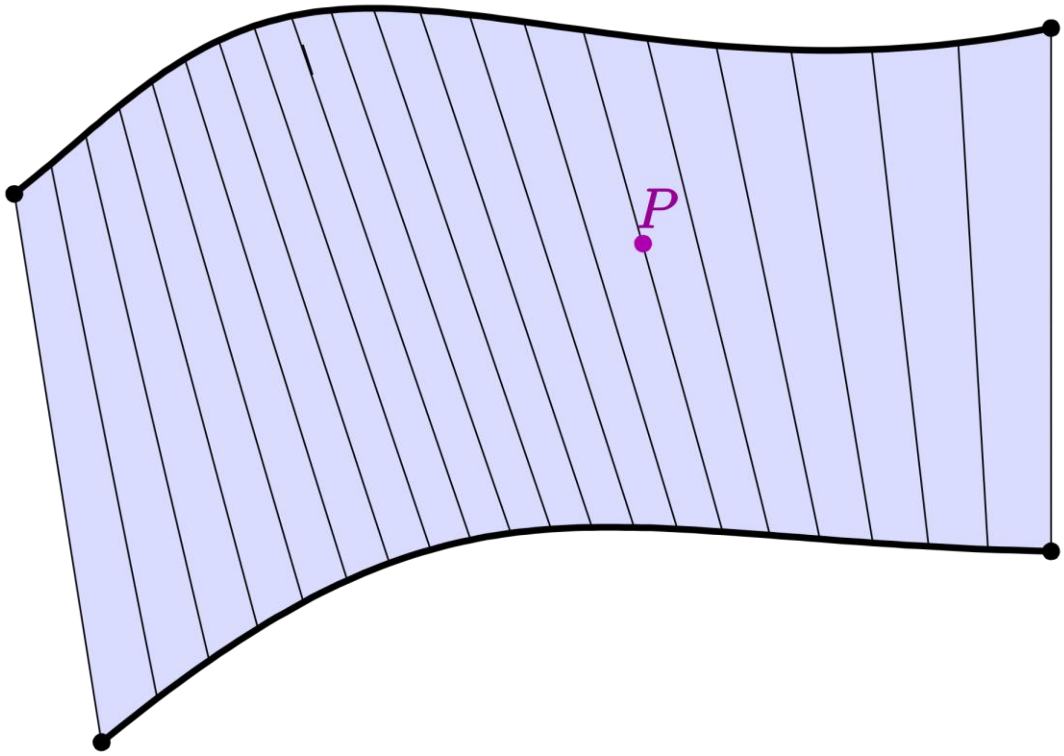

Σύμφωνα με τα παραπάνω $\varepsilon^2=a^2+b^2$, οπότε $\varepsilon=\sqrt{6}$. Οι εστίες της λοιπόν είναι τα σημεία $\left(-\sqrt{6},0\right)$ και $\left(\sqrt{6},0\right)$.

Τα παραπάνω εν κινήσει:

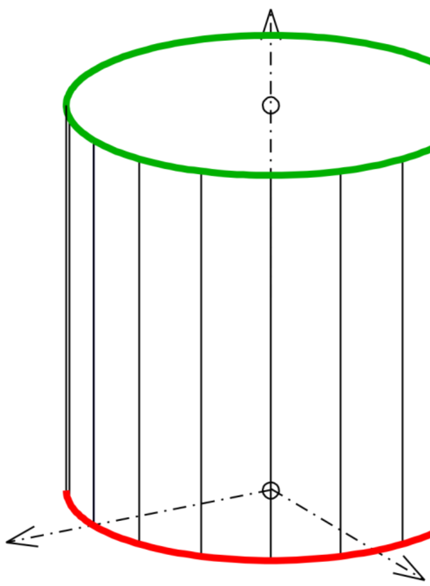
https://www.youtube.com/watch?v=HO2zAU3Eppo

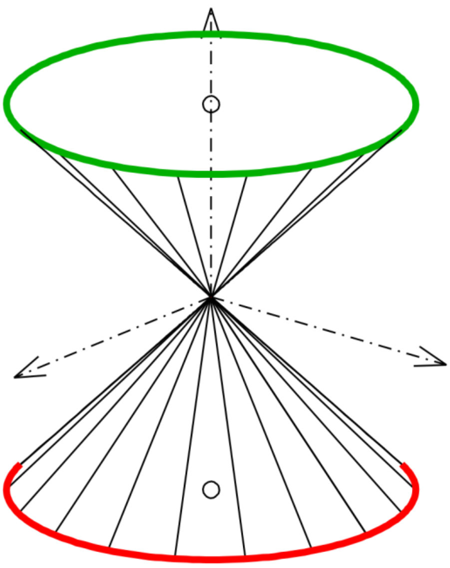
Ruled surfaces

Μια επιφάνεια παίρνει αυτό το όνομα όταν από κάθε σημείο της διέρχεται μια ευθεία που βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια.

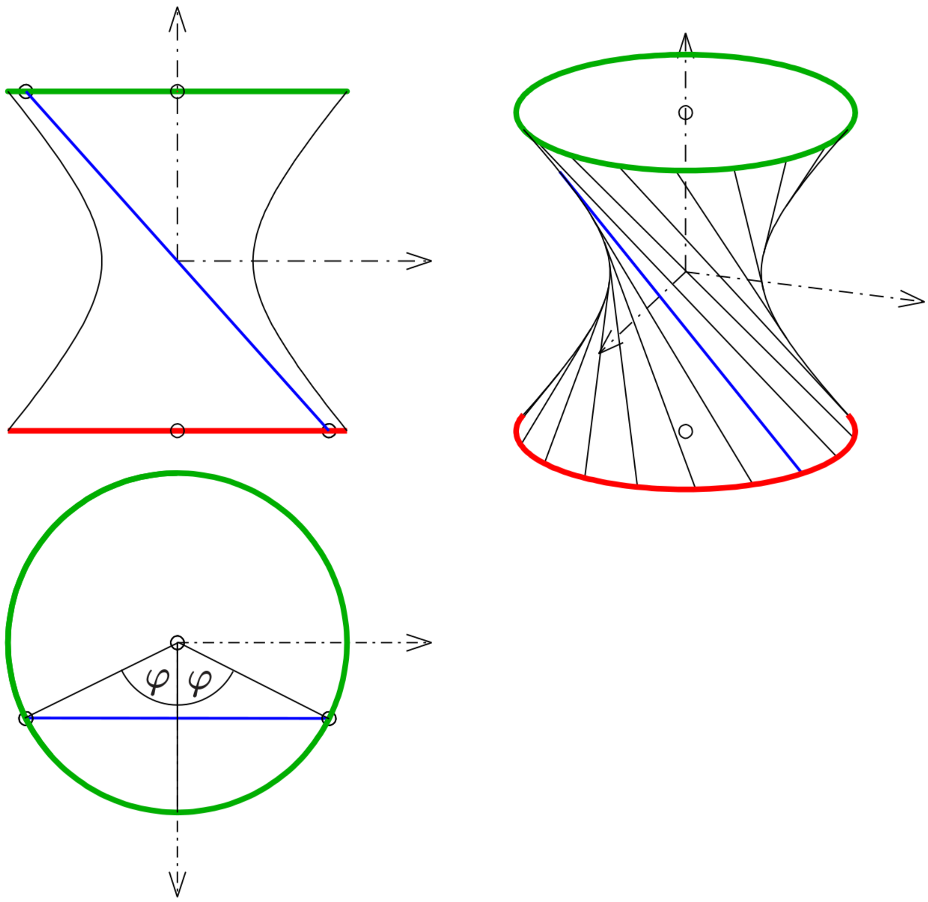



Ο κύλινδρος και ο κώνος είναι τέτοιες επιφάνειες.



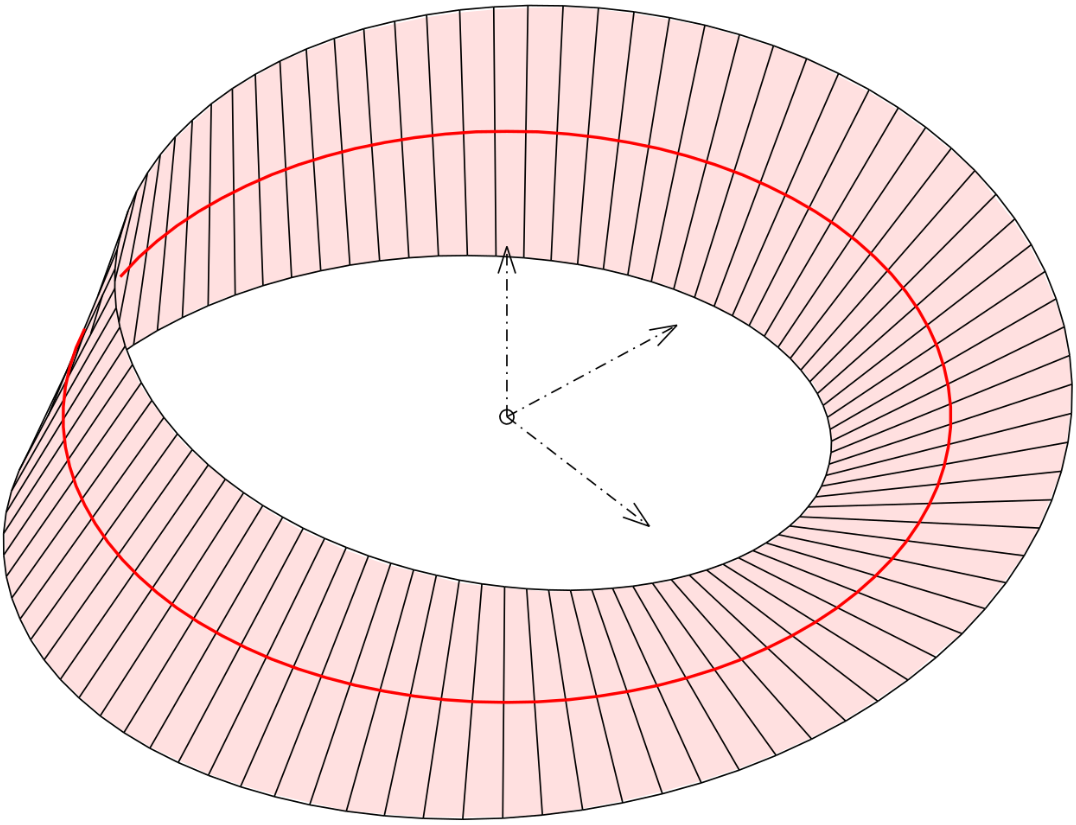


το υπερβολοειδές

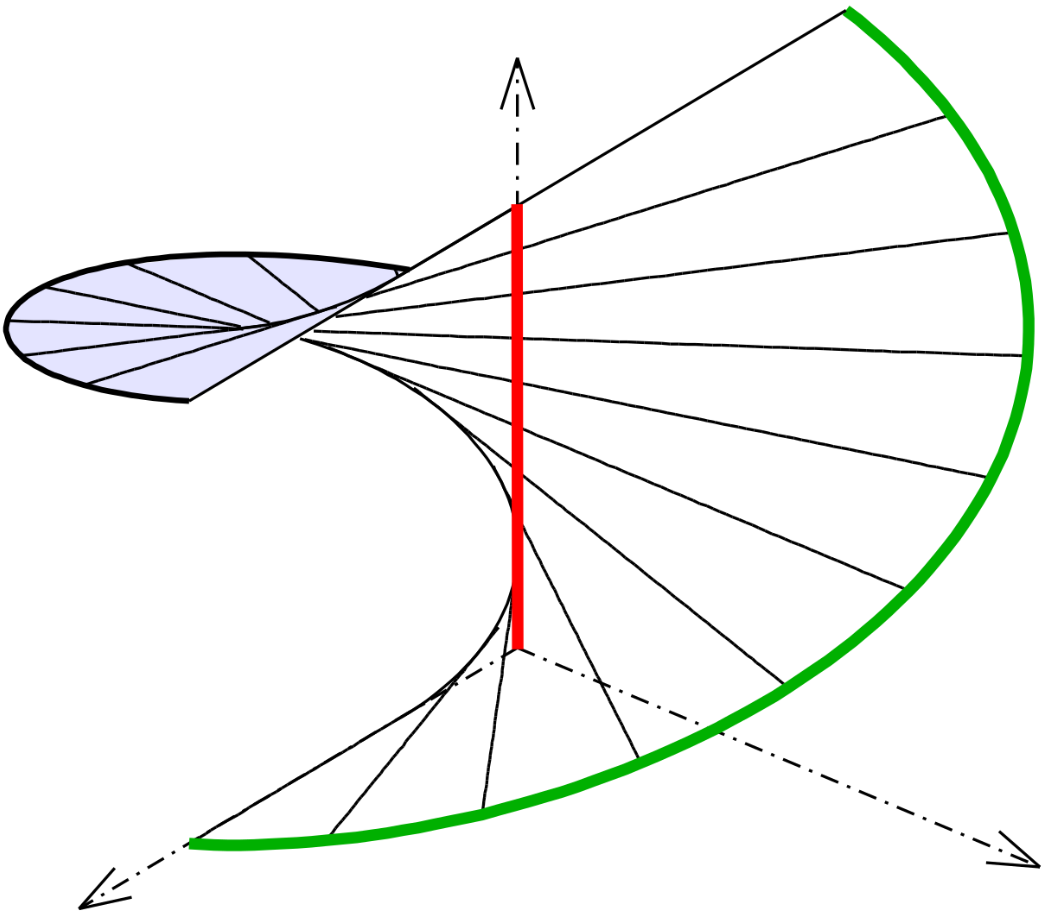




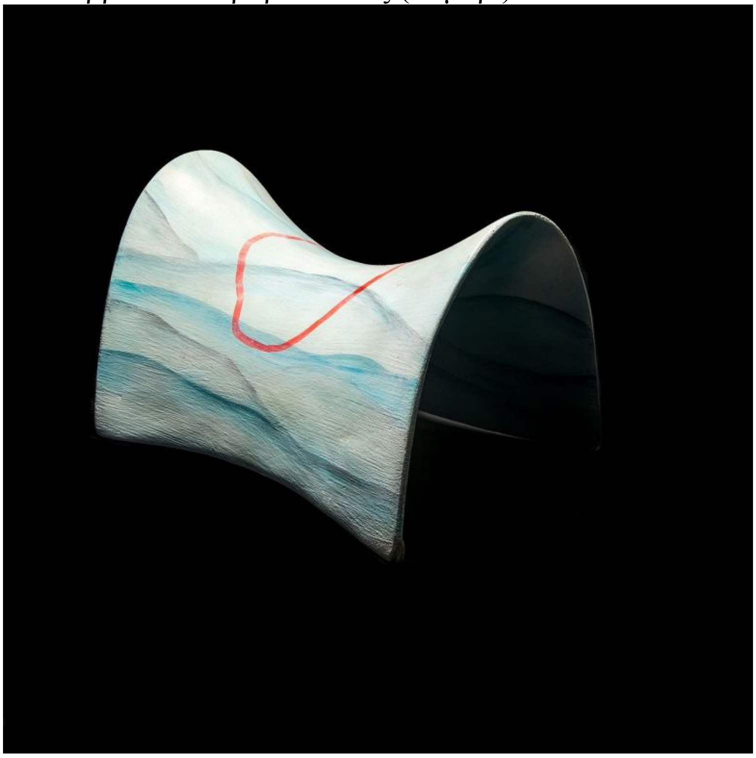
https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperboloid#/media/File:Cylinder_-_hyperboloid_-_cone.gif η ταινία του Möbius

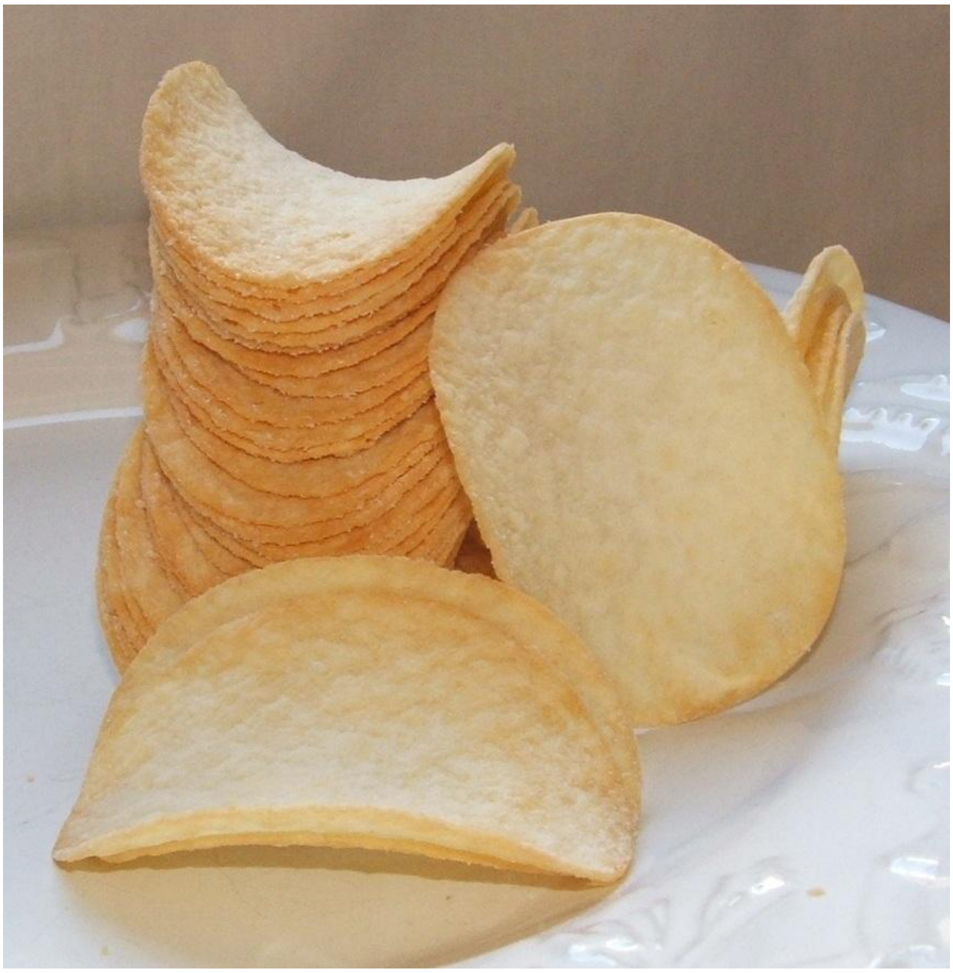


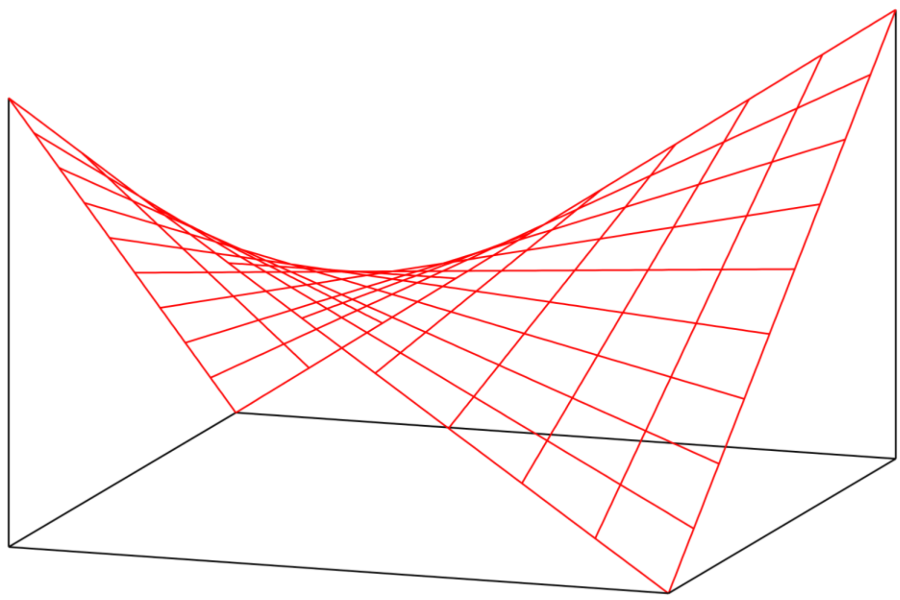
το ελικοειδές



το υπερβολικό παραβολοειδές (σαμάρι)







Σχήματα απο Wikipedia, geogebra και Wolfram alpha

*Without mathematics there is no art*

*Luca Pacioli*