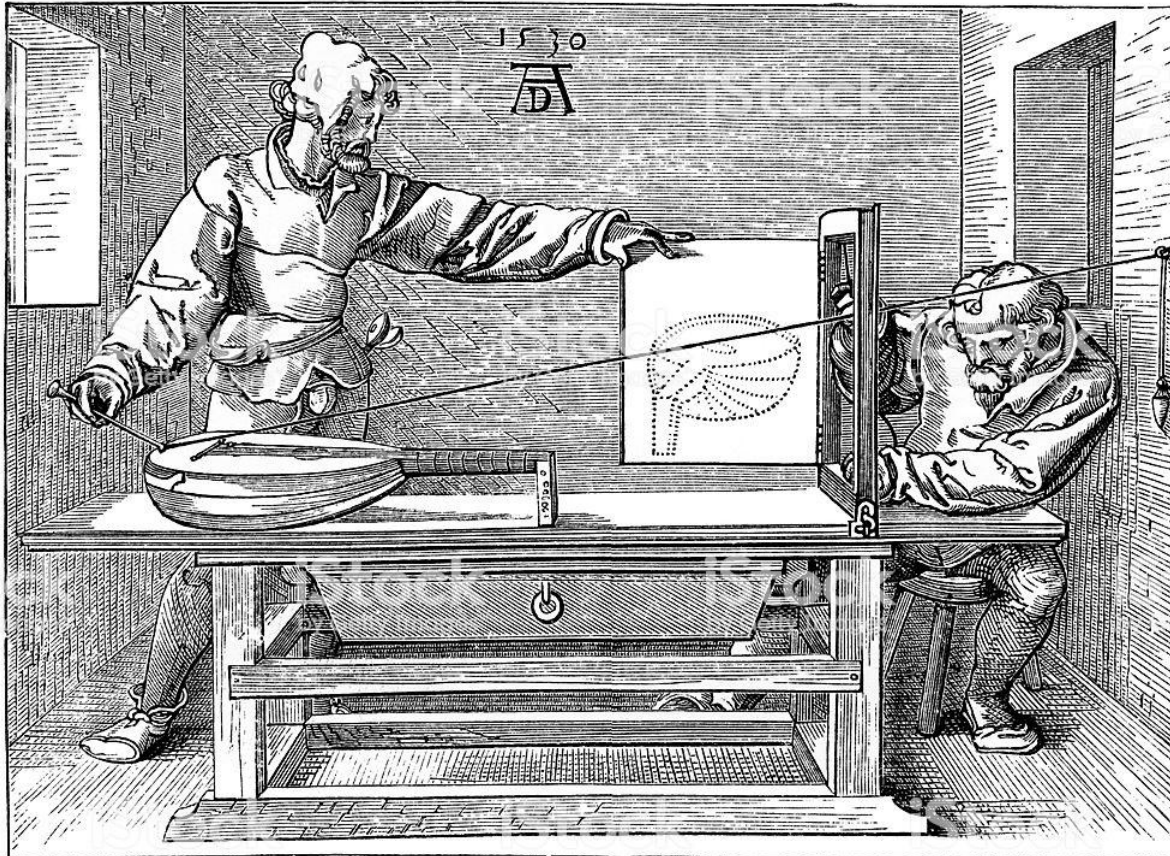
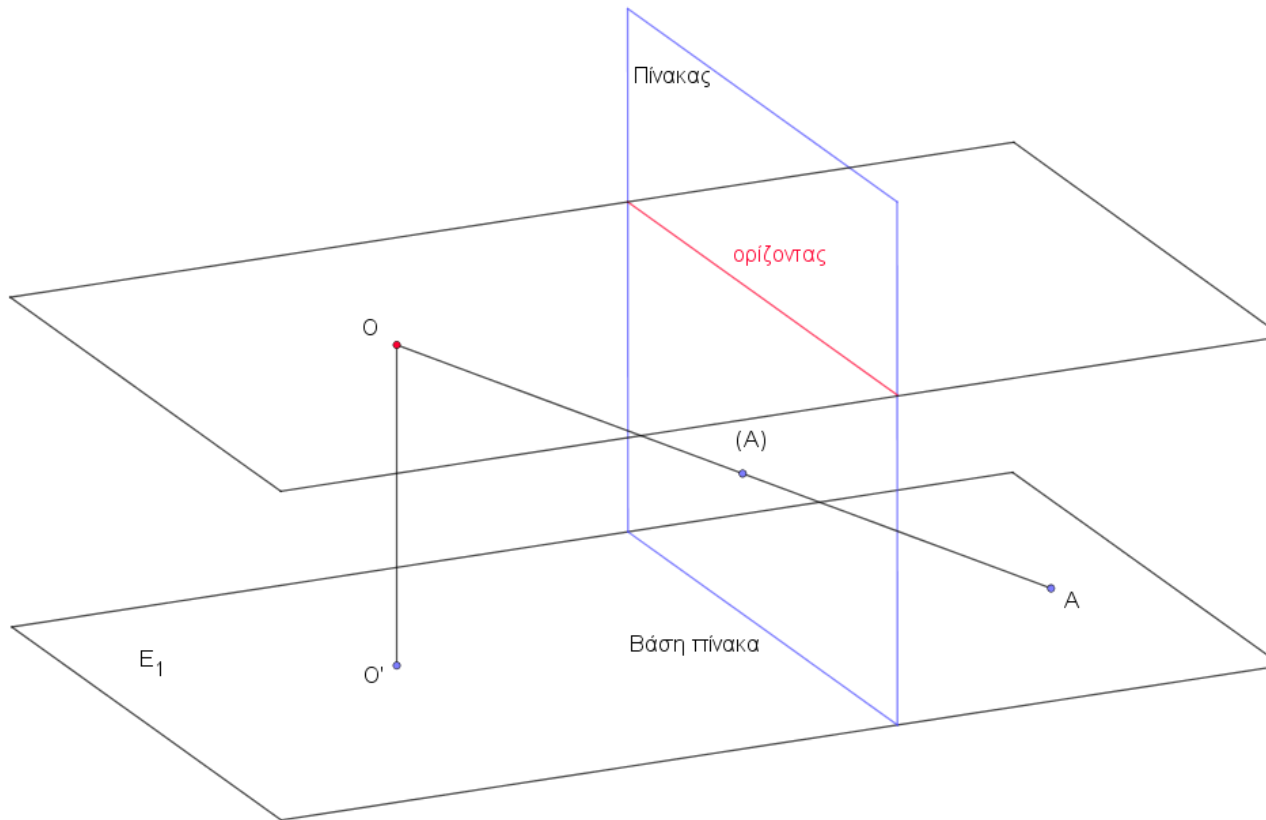


Προοπτικό σε κατακόρυφο πίνακα

Albrecht Dürer



Ξεκινάμε με ένα επίπεδο  $E_1$  και θεωρούμε ένα επίπεδο που θα αποκαλούμε πίνακα το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο  $E_1$ . Η τομή τους είναι μια ευθεία που λέγεται βάση του πίνακα. Ο παρατηρητής βρίσκεται στο σημείο  $O'$  του  $E_1$  και παρατηρεί από το σημείο  $O$ . Η  $OO'$  είναι κάθετη στο  $E_1$ . Το επίπεδο που είναι κάθετο στον πίνακα και διέρχεται από το σημείο  $O$  τέμνει τον πίνακα σε μια ευθεία (κόκκινο χρώμα) που λέγεται ορίζοντας, η οποία είναι παράλληλη στο  $E_1$ . Θεωρούμε ένα σημείο  $A$  του χώρου. Η ευθεία  $OA$  τέμνει τον πίνακα στο σημείο  $(A)$  που λέγεται προοπτικό του  $A$ . Η  $OA$  ονομάζεται οπτική ακτίνα.



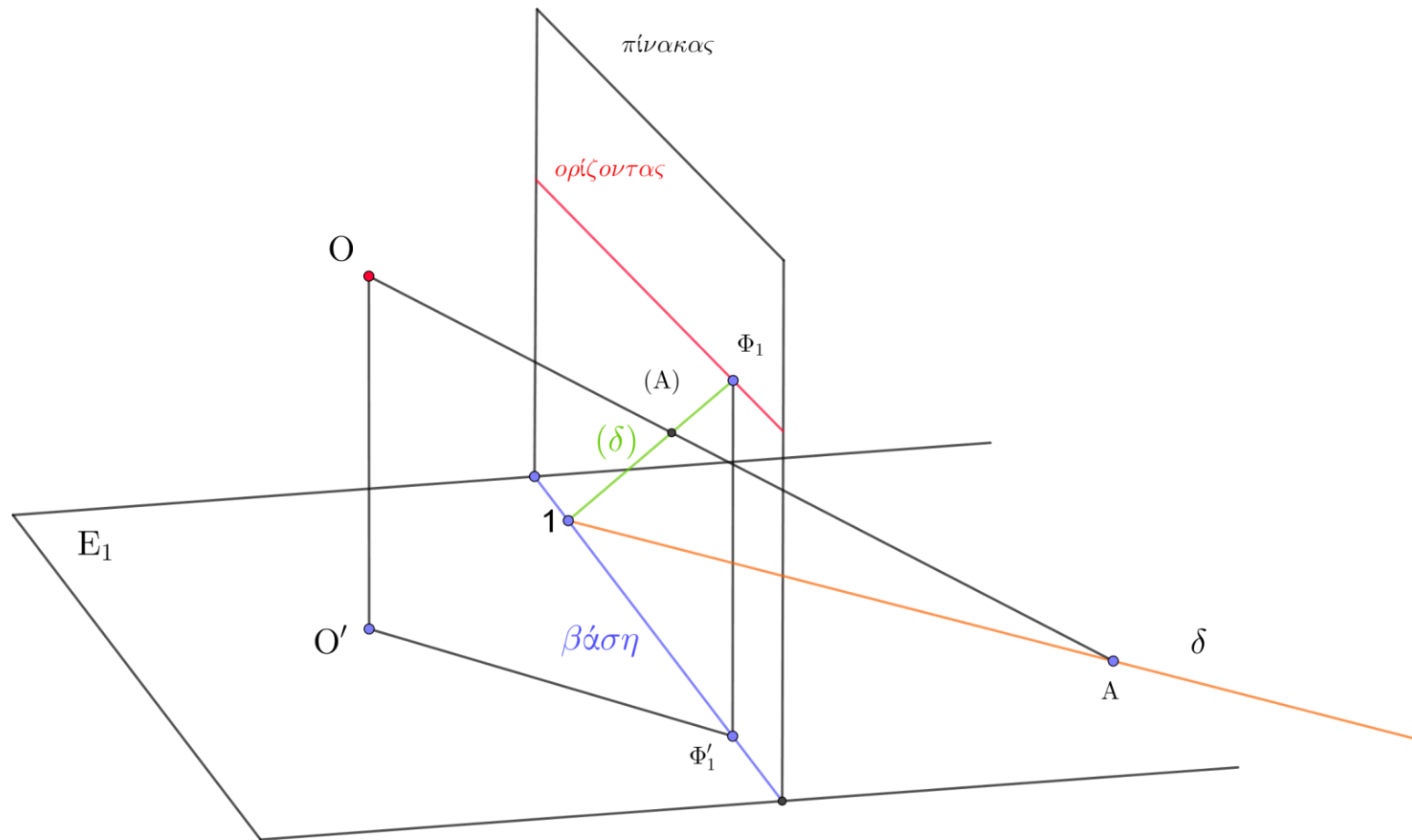
Σχήμα 1

Θεωρούμε μια ευθεία  $\delta$  του  $E_1$  και ζητάμε το προοπτικό της στον πίνακα. Καθώς το  $A$  κινείται πάνω στην  $\delta$ , το προοπτικό του ( $A$ ) κινείται πάνω σε μια ευθεία ( $\delta$ ) πάνω στον πίνακα. Για να την καθορίσουμε χρειαζόμαστε δύο σημεία. Το πρώτο είναι το σημείο 1 (η τομή της  $\delta$  με την βάση του πίνακα), το δεύτερο είναι το σημείο  $\Phi_1$  το οποίο θα καθορίσουμε μετά από την

Παρατήρηση: Η  $O\Phi_1$  και η  $1A$  βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, η  $O\Phi_1$  βρίσκεται σε ένα επίπεδο παράλληλο στο  $E_1$  άρα δεν τέμνει την  $1A$ , άρα η  $O\Phi_1$  και η  $1A$  είναι παράλληλες. Από το  $\Phi_1$  φέρουμε κάθετη στη βάση που την τέμνει στο  $\Phi'_1$ . Η  $\Phi_1\Phi'_1$  είναι κάθετη στο επίπεδο. Τα σημεία  $O, O', \Phi_1, \Phi'_1$  βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (που ορίζεται από τις παράλληλες ευθείες  $O O', \Phi_1\Phi'_1$ ). Η  $O\Phi_1$  δεν τέμνει το  $E_1$ , άρα είναι παράλληλη στην  $O'\Phi'_1$ .

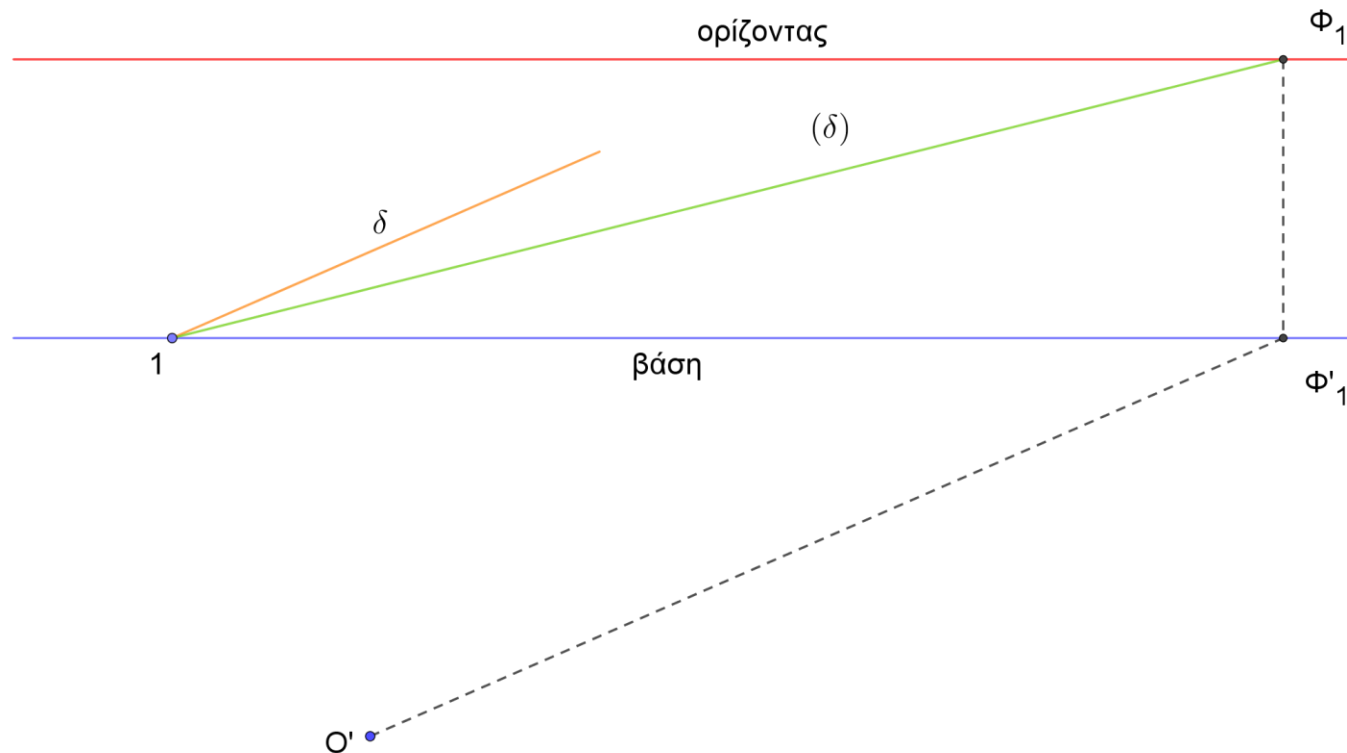
Με δεδομένη λοιπόν την  $\delta$ , φέρουμε από το  $O'$  παράλληλη προς την  $\delta$  η οποία τέμνει την βάση στο  $\Phi'_1$ . Από το  $\Phi'_1$  φέρουμε την κάθετο στην βάση η οποία τέμνει τον ορίζοντα στο  $\Phi_1$ . Η  $1\Phi_1$  είναι το προοπτικό της  $\delta$ .

Το σημείο  $\Phi_1$  λέγεται σημείο φυγής της  $\delta$ .



Σχήμα 2

Ακολούθως κατακλίνουμε το επίπεδο του πίνακα πάνω στο  $E_1$  (το χαρτί σχεδίασης). Με την καθοδήγηση του προηγούμενου σχήματος, θα δούμε πως κατασκευάζεται το προοπτικό  $(\delta)$  (πράσινο χρώμα) της ευθείας  $\delta$  (πορτοκαλί χρώμα) που βρίσκεται πάνω στο  $E_1$ .

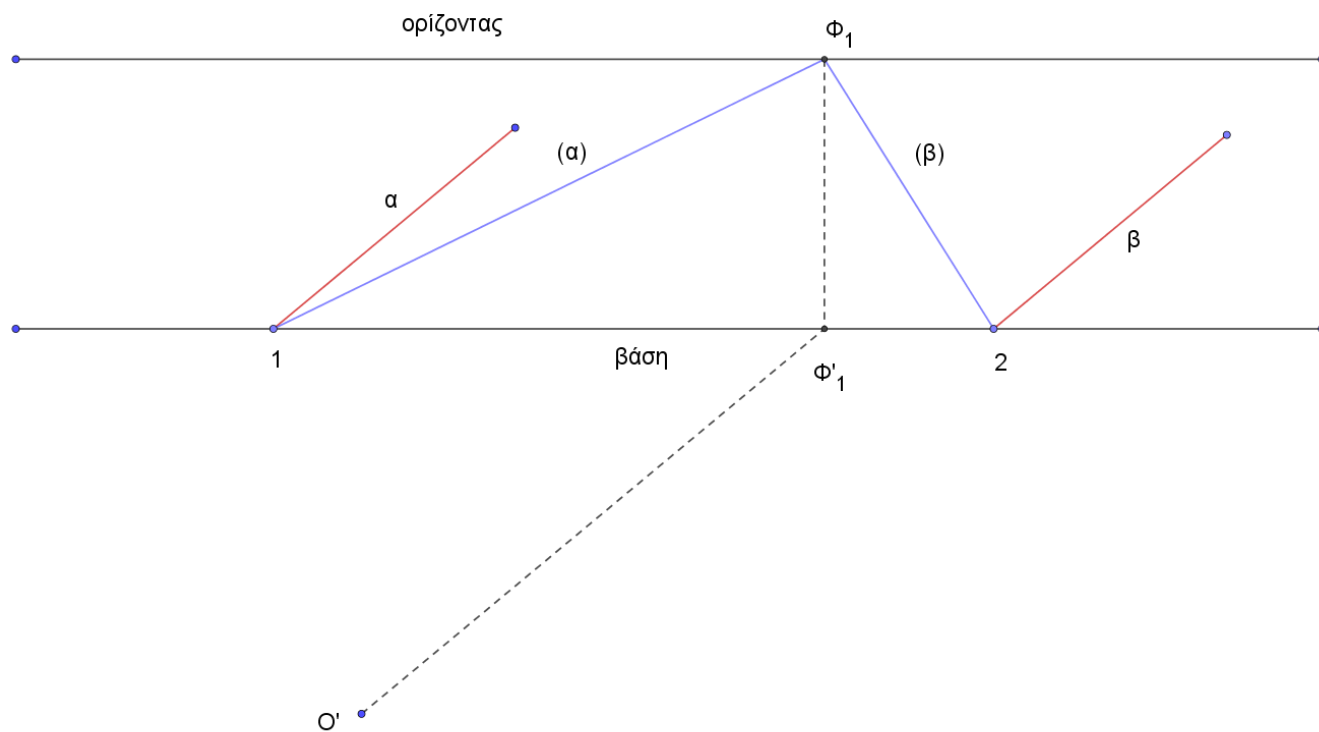


Σχήμα 3

Από το  $O'$  φέρουμε παράλληλη στην  $\delta$  η οποία τέμνει τη βάση στο  $\Phi'_1$ . Από το  $\Phi'_1$  φέρουμε κάθετη στον ορίζοντα που τον τέμνει στο  $\Phi_1$ . Η  $1\Phi_1$  είναι το προοπτικό  $(\delta)$  (πράσινο χρώμα) της  $\delta$ .

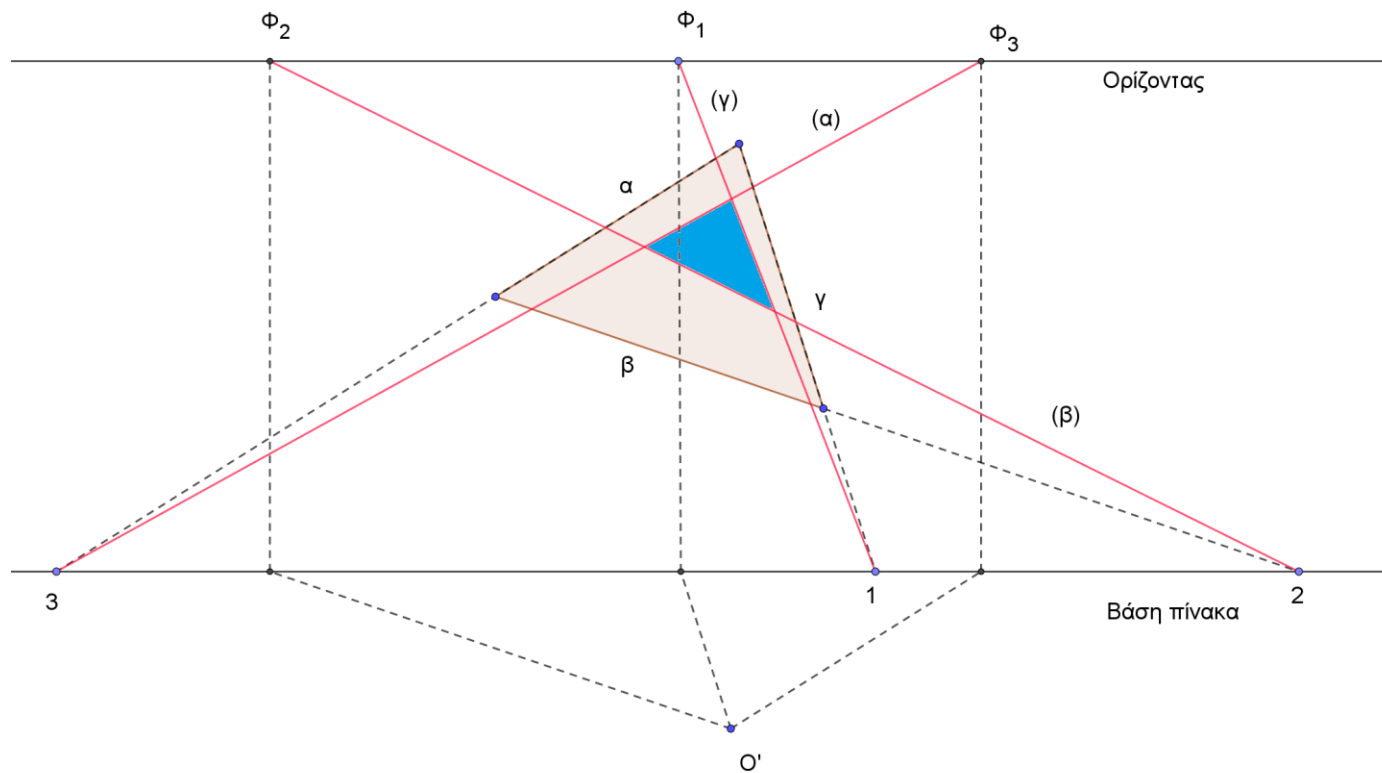
Παράλληλες ευθείες έχουν το ίδιο σημείο φυγής

Οι παράλληλες ευθείες  $\alpha, \beta$  (καφέ χρώμα) έχουν το ίδιο σημείο φυγής  $\Phi_1$ .



Σχήμα 4

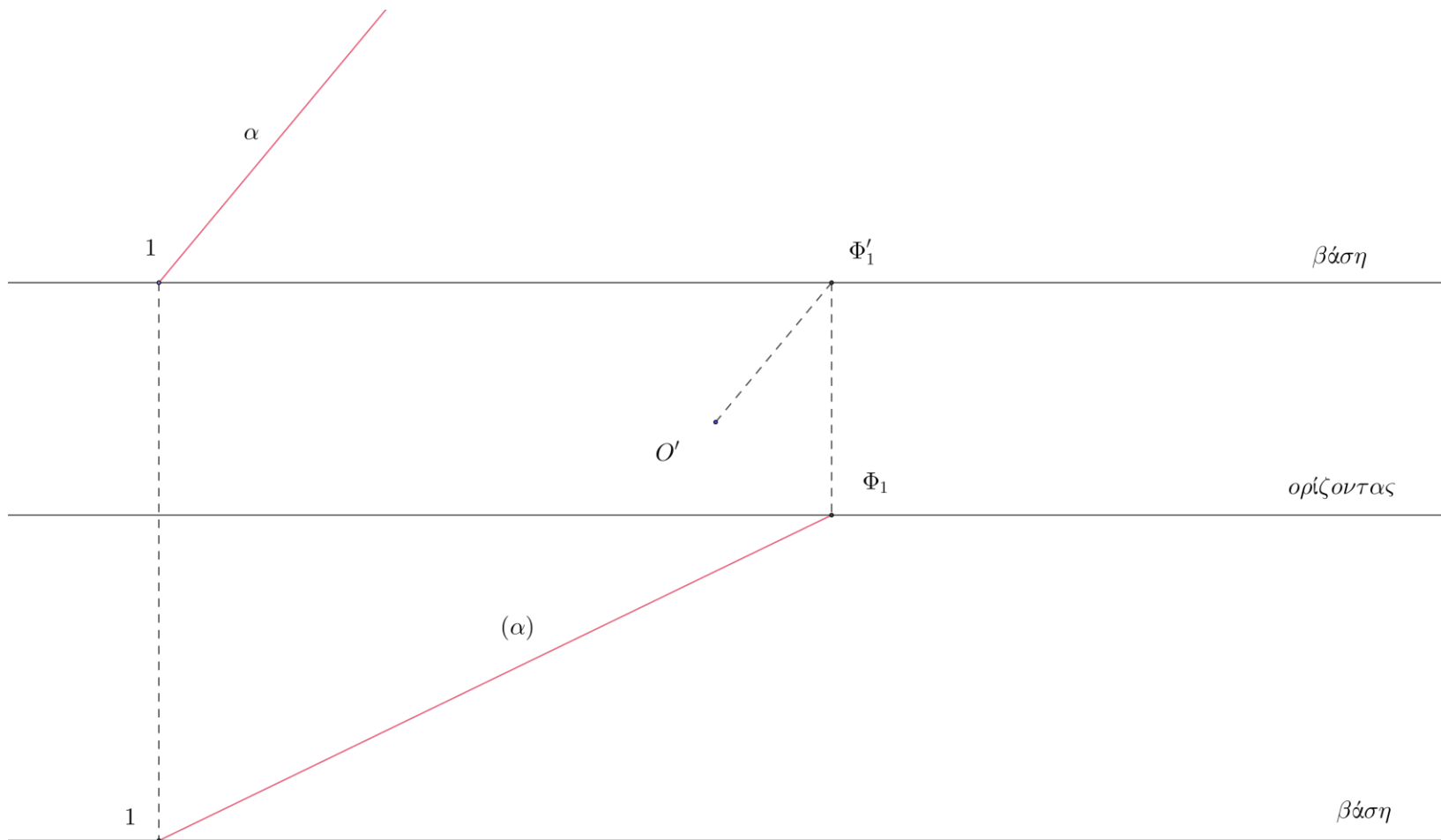
Θα σχεδιάσουμε το προοπτικό (μπλέ) του τριγώνου (καφέ) με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha, \beta, \gamma$ .



Σχήμα 5

Επειδή ένα σχήμα (όπως αυτό του τριγώνου) πάνω στο χαρτί σχεδίασης εμφανίζεται πολύ κοντά στο προοπτικό του, θα κάνουμε μια παράλληλη μετατόπιση της βάσης του πίνακα.

Ας δούμε ένα παράδειγμα για μια ευθεία  $\alpha$ :

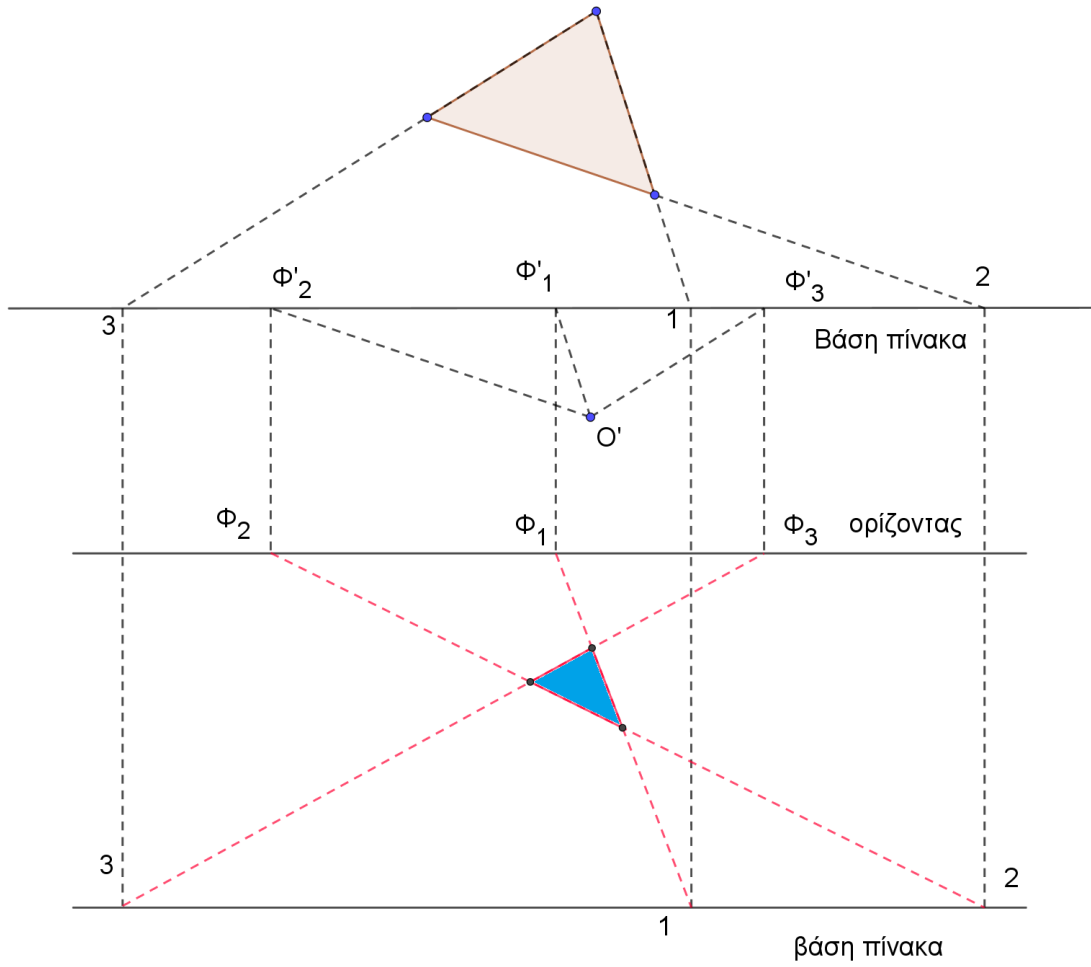


Σχήμα 6

Στην βάση (άνω μέρος) θα σχεδιάζουμε την ευθεία  $\alpha$ , το 1 και το  $\Phi'_1$ , στον ορίζοντα το σημείο φυγής  $\Phi_1$  και στην βάση στο κάτω μέρος θα σχεδιάζουμε το 1, και το προοπτικό της ευθείας.

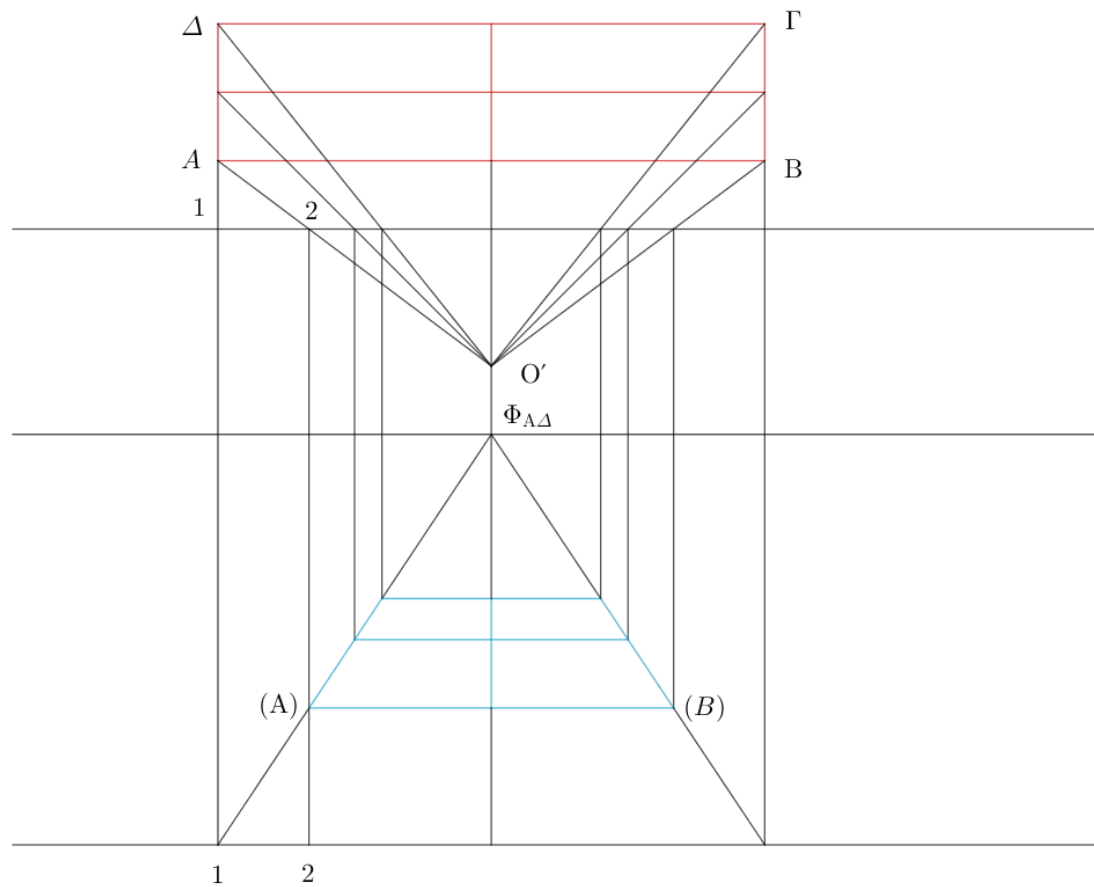
Πρέπει να διατηρείται η απόσταση της (κάτω) βάσης του πίνακα από τον ορίζοντα. Είναι το ύψος του παρατηρητή.

Το σχήμα 5 μετά την παράλληλη μετατόπιση γίνεται



Σχήμα 7

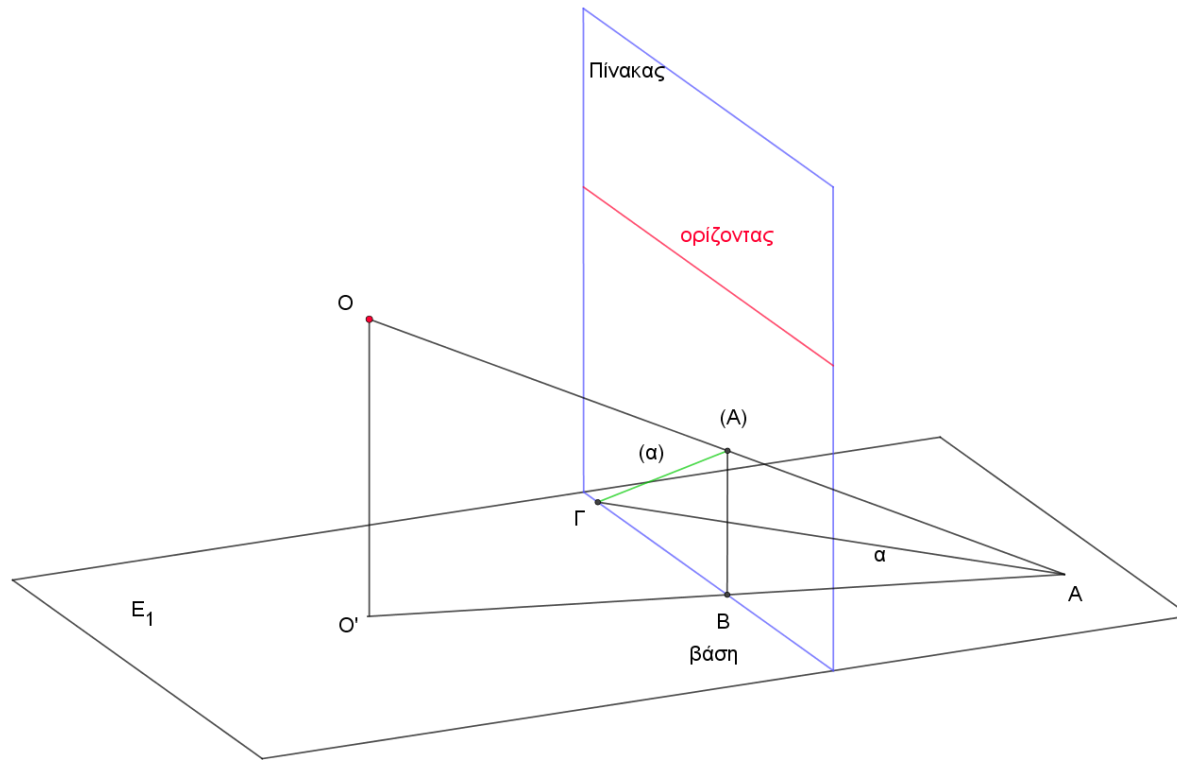
Προοπτικό ενός παραλληλογράμμου που βρίσκεται πάνω στο  $E_1$ :



Σχήμα 8



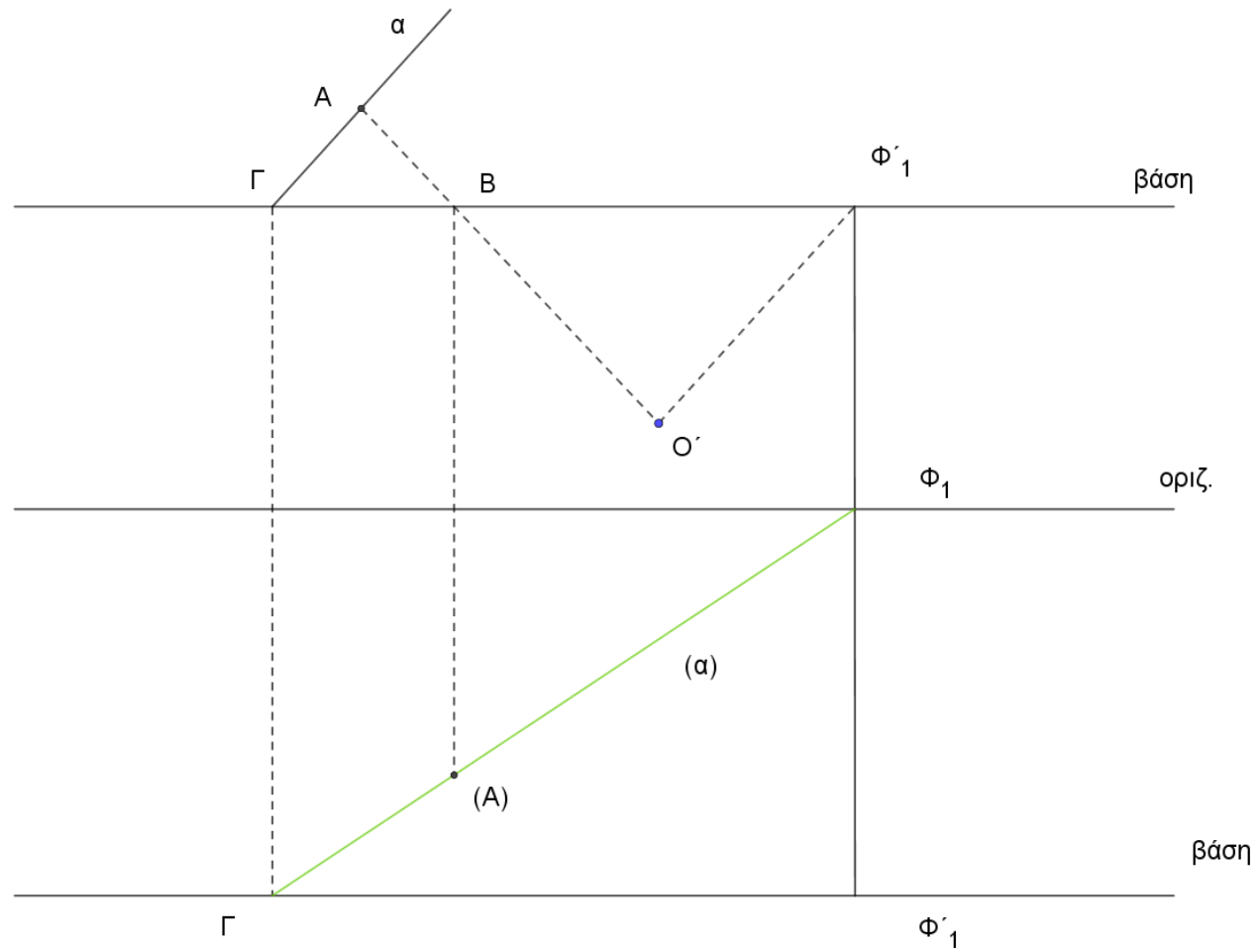
Εύρεση του προοπτικού ενός σημείου που βρίσκεται πάνω στο  $E_1$



Σχήμα 10

Δίνεται ένα σημείο  $A$  στο  $E_1$ . Θα σχεδιάσουμε το προοπτικό του, το  $(A)$ . Έστω  $B$  η τομή της  $AO'$  με την βάση. Η  $(A)B$  είναι κάθετη στην βάση. Σχεδιάζουμε μια τυχαία ευθεία  $\alpha$  η οποία διέρχεται από το  $A$  και τέμνει την βάση στο  $\Gamma$ . Παρατηρούμε ότι το  $(A)$  είναι η τομή της  $(\alpha)$  με την κάθετη επί της βάσης στο  $B$ .

Η προηγούμενη παρατήρηση υποδεικνύει την ακόλουθη κατασκευή στο χαρτί σχεδίασης:

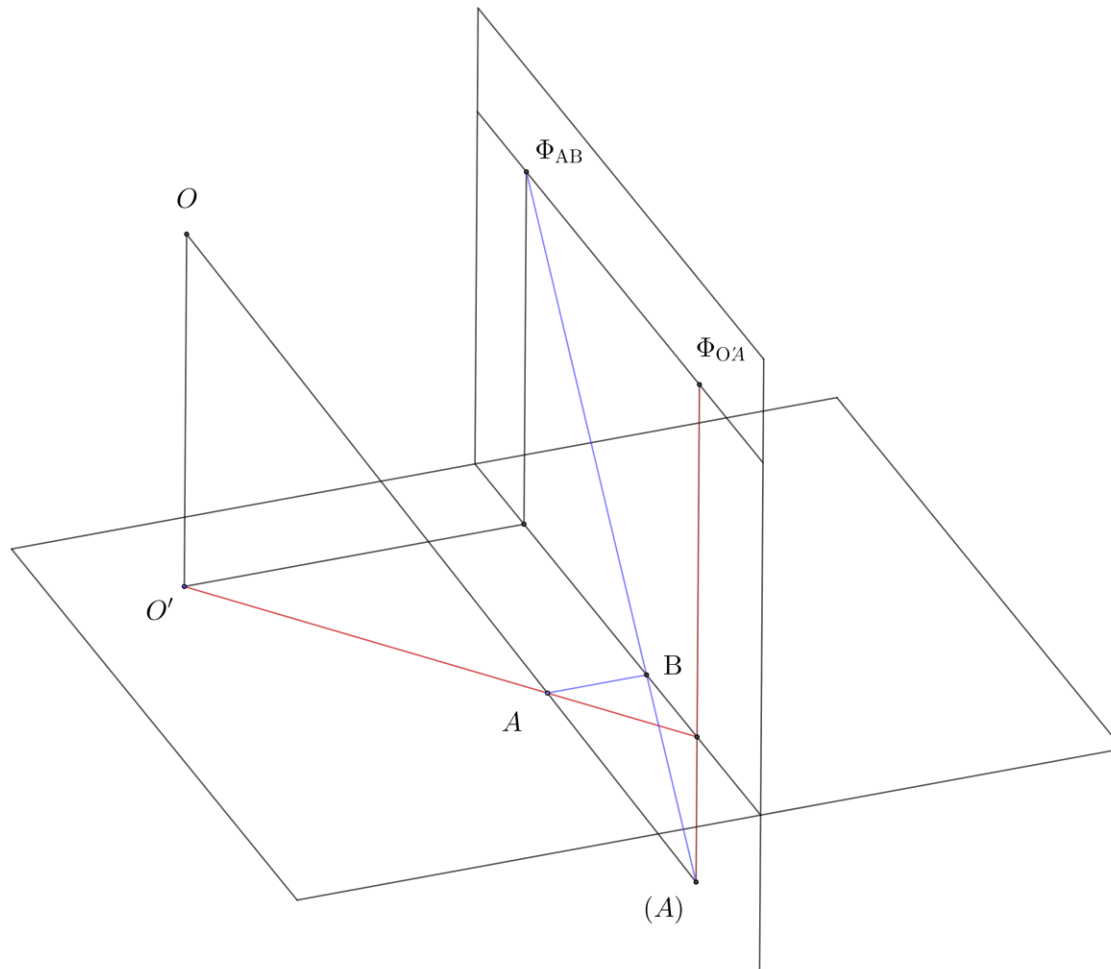


Σχήμα 11

Σχεδιάζουμε την  $(\alpha)$  και από το  $B$  φέρουμε κάθετο στην βάση η οποία τέμνει την  $(\alpha)$  στο  $(A)$ .

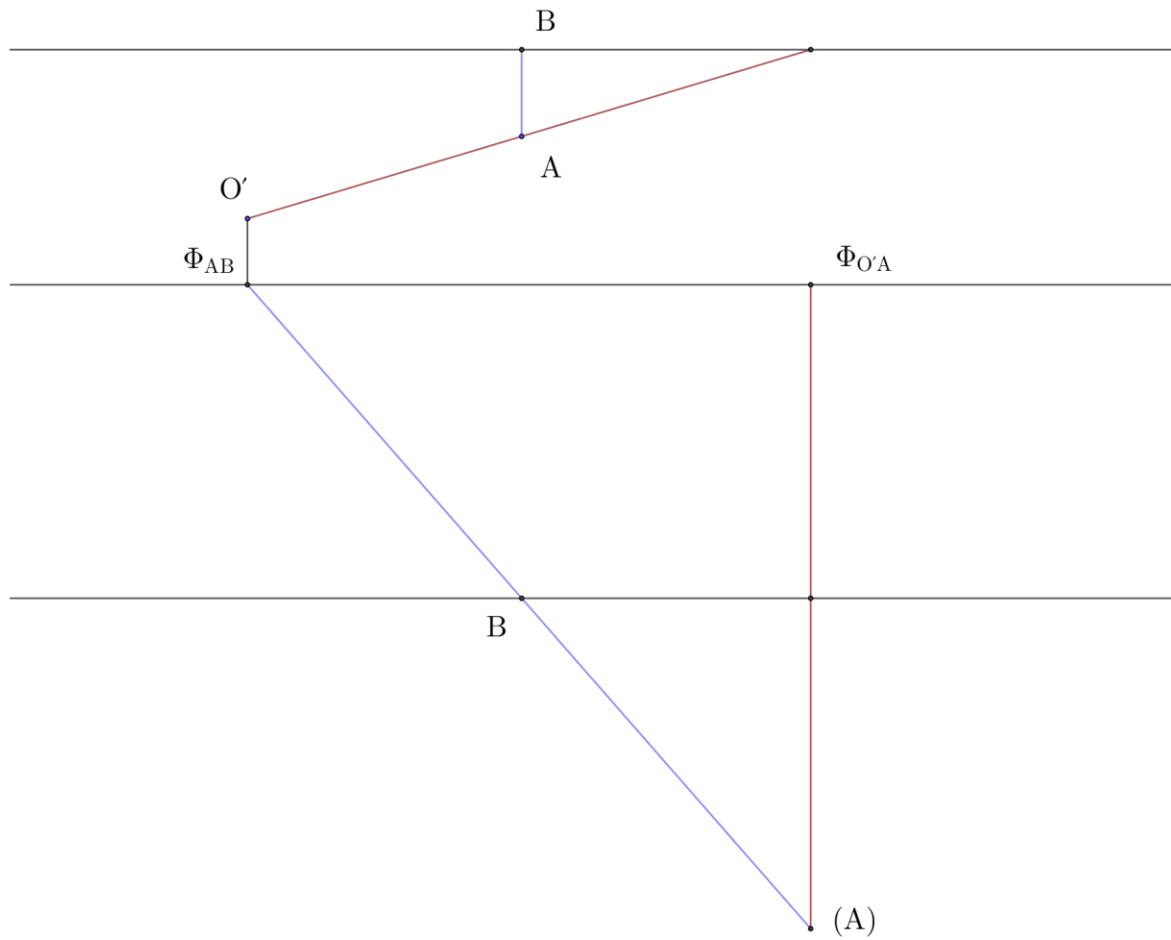
Εύρεση του προοπτικού σημείου A πάνω στο  $E_1$  που βρίσκεται μεταξύ της βάσης και του παρατηρητή

Το προοπτικό ( $A$ ) του  $A$  είναι η τομή των προοπτικών δύο ευθειών, αυτής που περιέχει τα σημεία  $O', A$  και αυτής που περιέχει τα σημεία  $A, B$ .



Σχήμα 11β

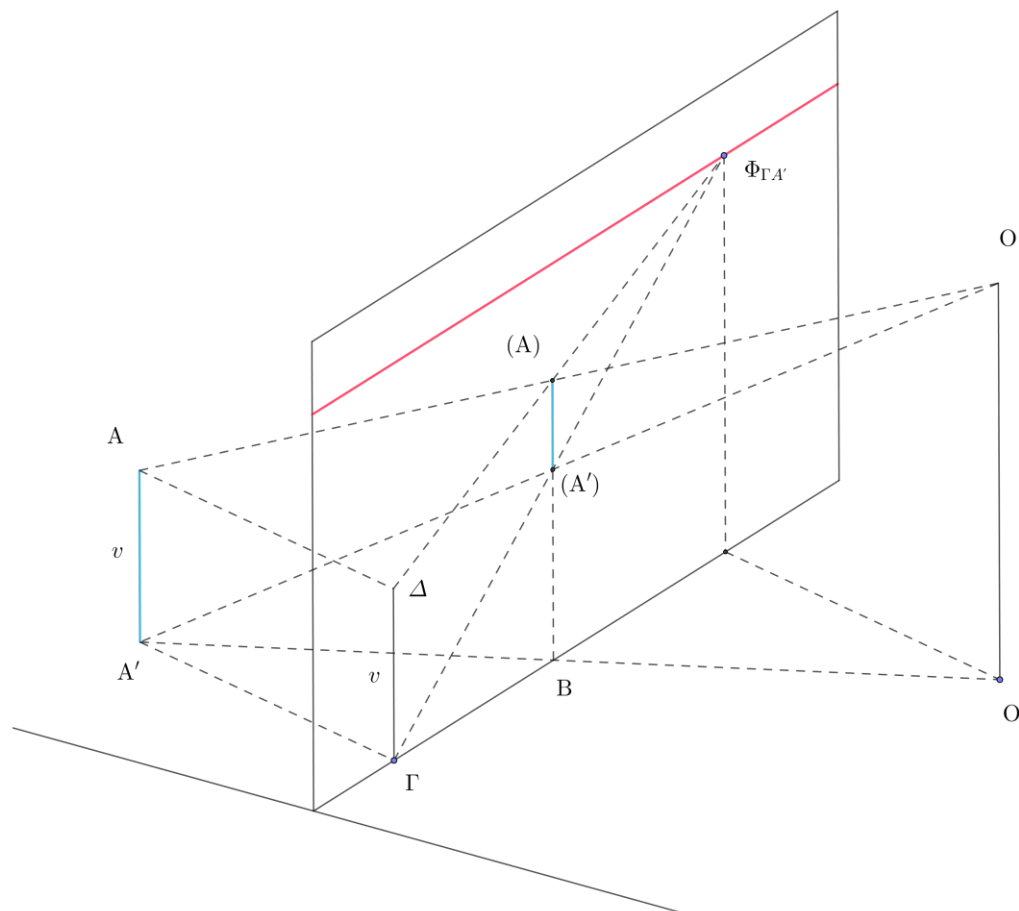
Στο χαρτί έχουμε



Σχήμα 11γ

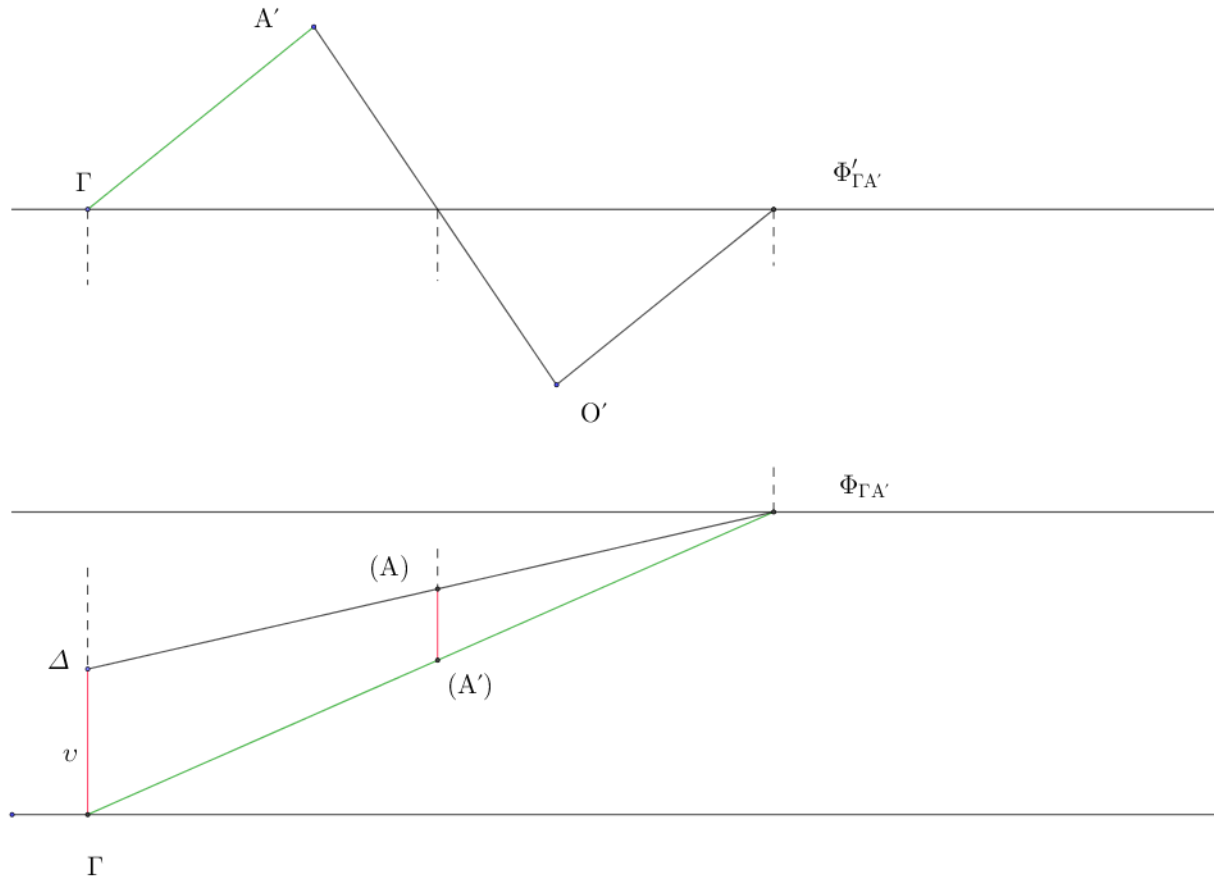
### Εύρεση του προοπτικού ενός τυχαίου σημείου του χώρου

Θεωρούμε το σημείο  $A$  με προβολή το  $A'$  και υψόμετρο  $v$ . Θα σχεδιάσουμε το προοπτικό  $(A)$  του  $A$ . Σχεδιάζουμε τυχαία ευθεία διερχόμενη από το  $A'$  η οποία τέμνει την βάση στο  $\Gamma$ . Η ευθεία που διέρχεται από τα  $\Gamma$  και  $(A')$  τέμνει τον ορίζοντα στο  $\Phi_{\Gamma A'}$ , το σημείο φυγής της  $A'\Gamma$ . Στο  $\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$  κάθετο στο  $E_1$ , μήκους  $v$ . Το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Phi_{\Gamma A'}$  διέρχεται από το  $(A)$ . Το προοπτικό του ευθύγραμμου τμήματος  $AA'$  είναι το  $(A)(A')$ .



Σχήμα 12

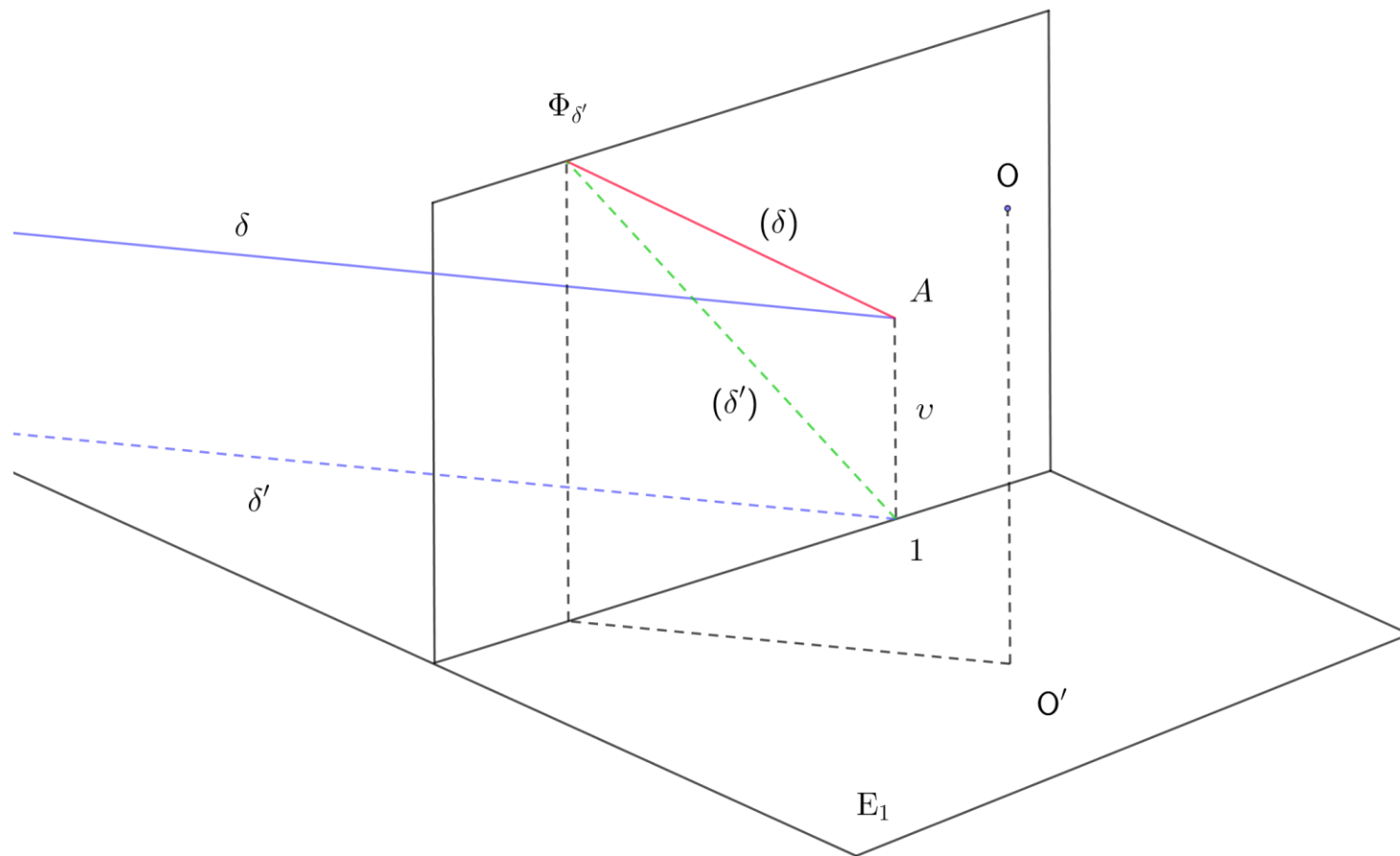
Τα παραπάνω μας οδηγούν στην ακόλουθη κατασκευή



Σχήμα 13

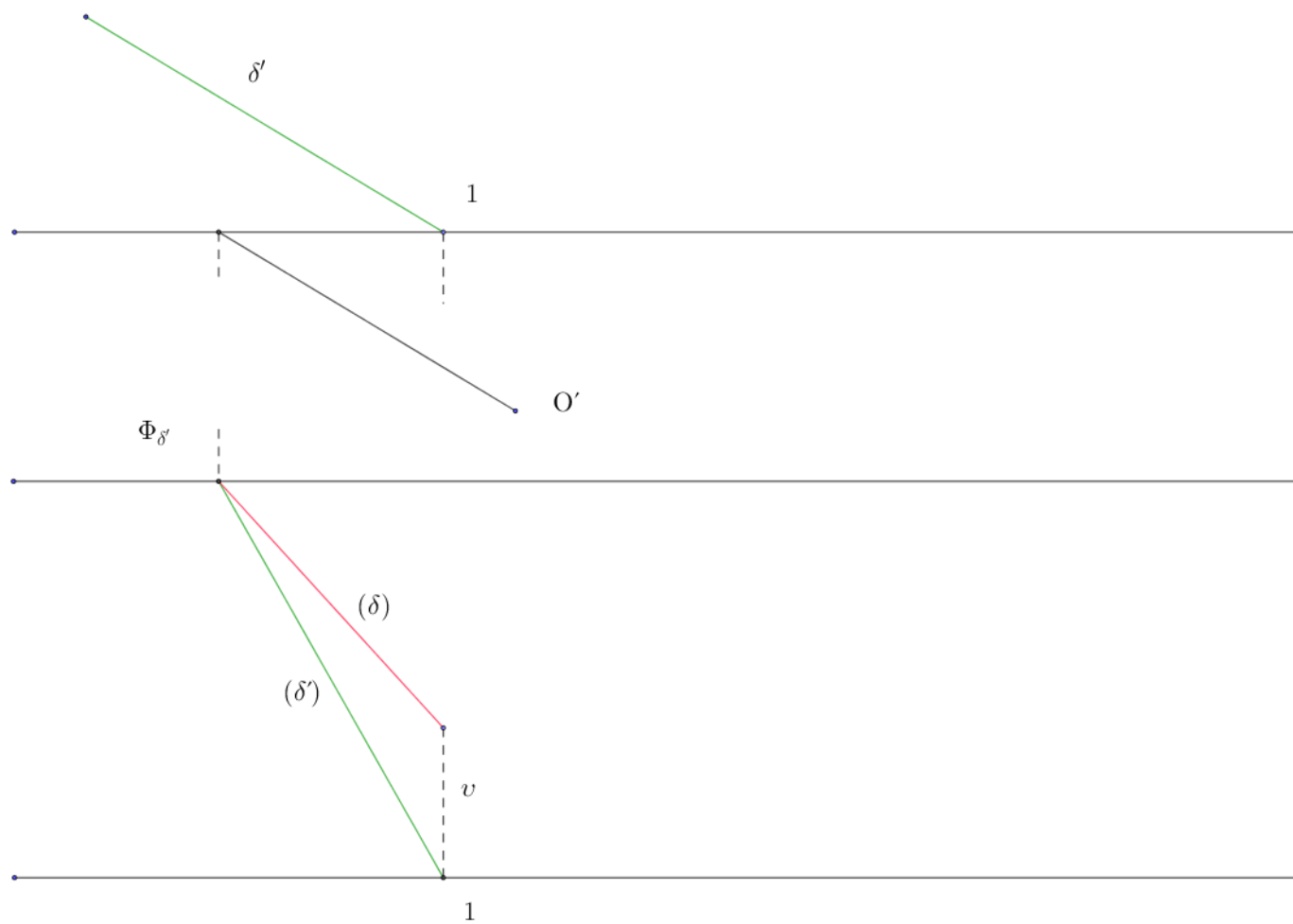
### Προοπτικό οριζόντιας ευθείας

Έστω  $\delta$  μια ευθεία (μπλέ) παράλληλη προς το  $E_1$  (δηλαδή οριζόντια) η οποία τέμνει τον πίνακα στο σημείο  $A$  που έχει υψόμετρο  $v$ . Η προβολή της στο  $E_1$  είναι η  $\delta'$  με προοπτικό ( $\delta'$ ). Το προοπτικό ( $\delta$ ) (κόκκινο) της  $\delta$  είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A$  και  $\Phi_{\delta'}$ .



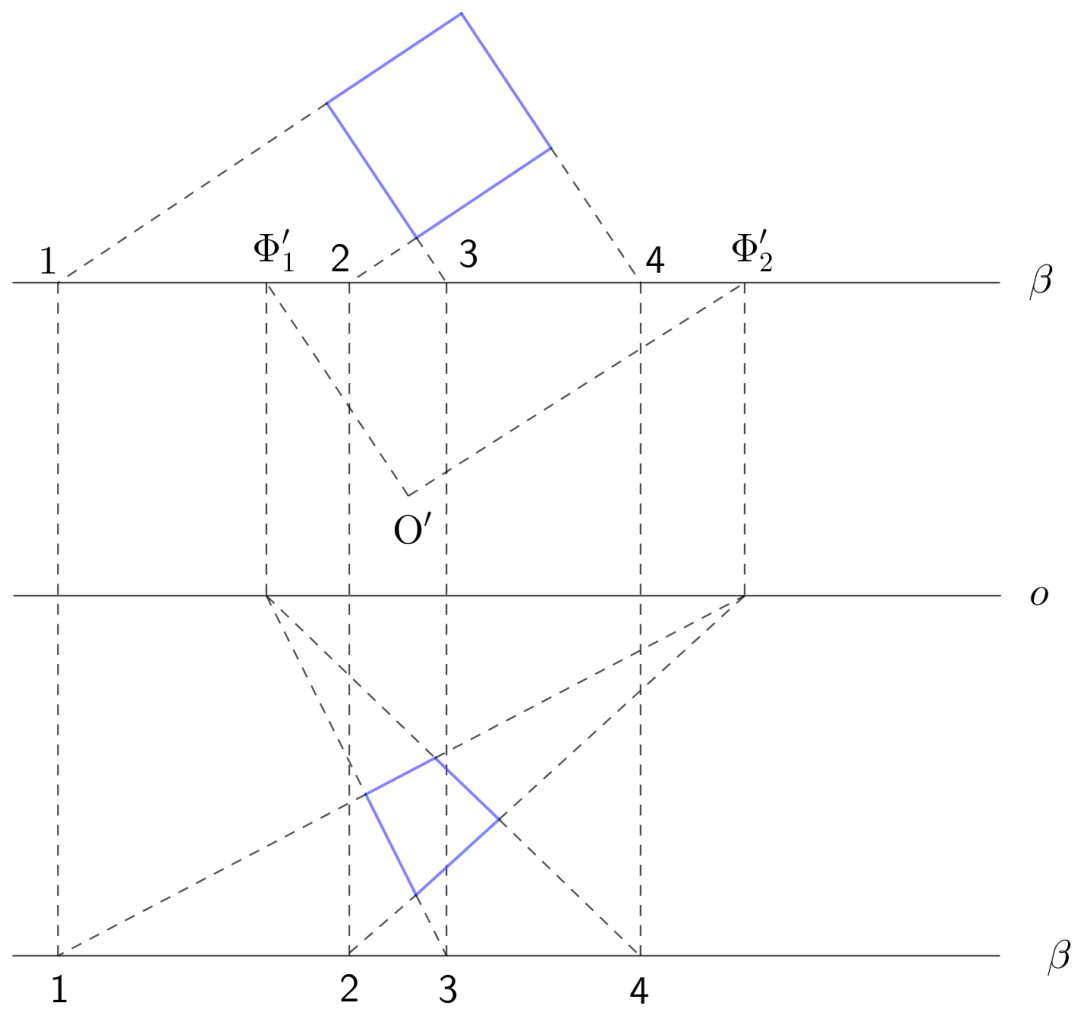
Σχήμα 14α

Σχεδιάζουμε στο χαρτί το προοπτικό της ευθείας  $\delta$  του σχήματος 14α

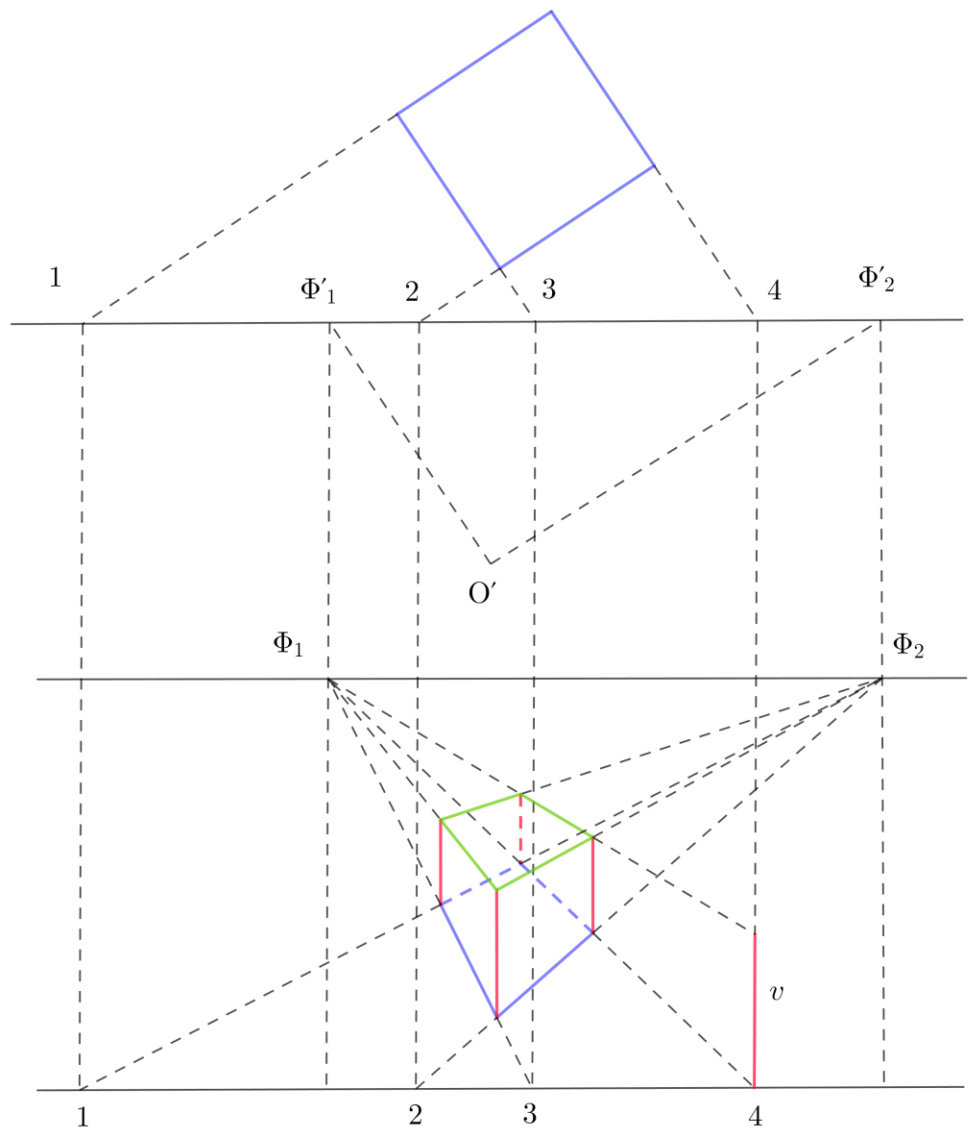


Σχήμα 14β

Προοπτικό πρίσματος με βάση στο  $E_1$  και ύψος  $v$ . Σχεδιάζουμε την βάση του πρίσματος και το προοπτικό της:



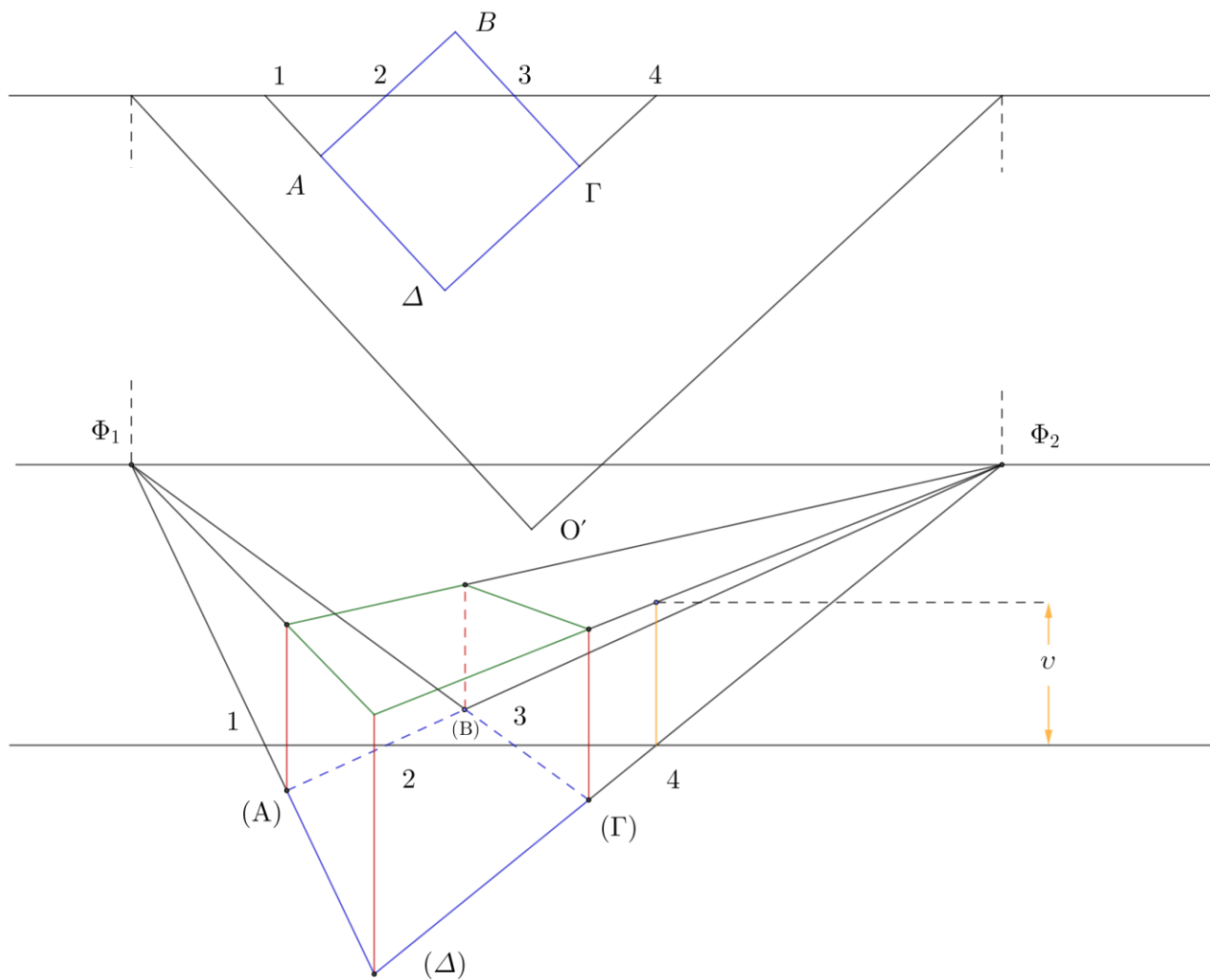
Σχήμα 15



Σχήμα 16α

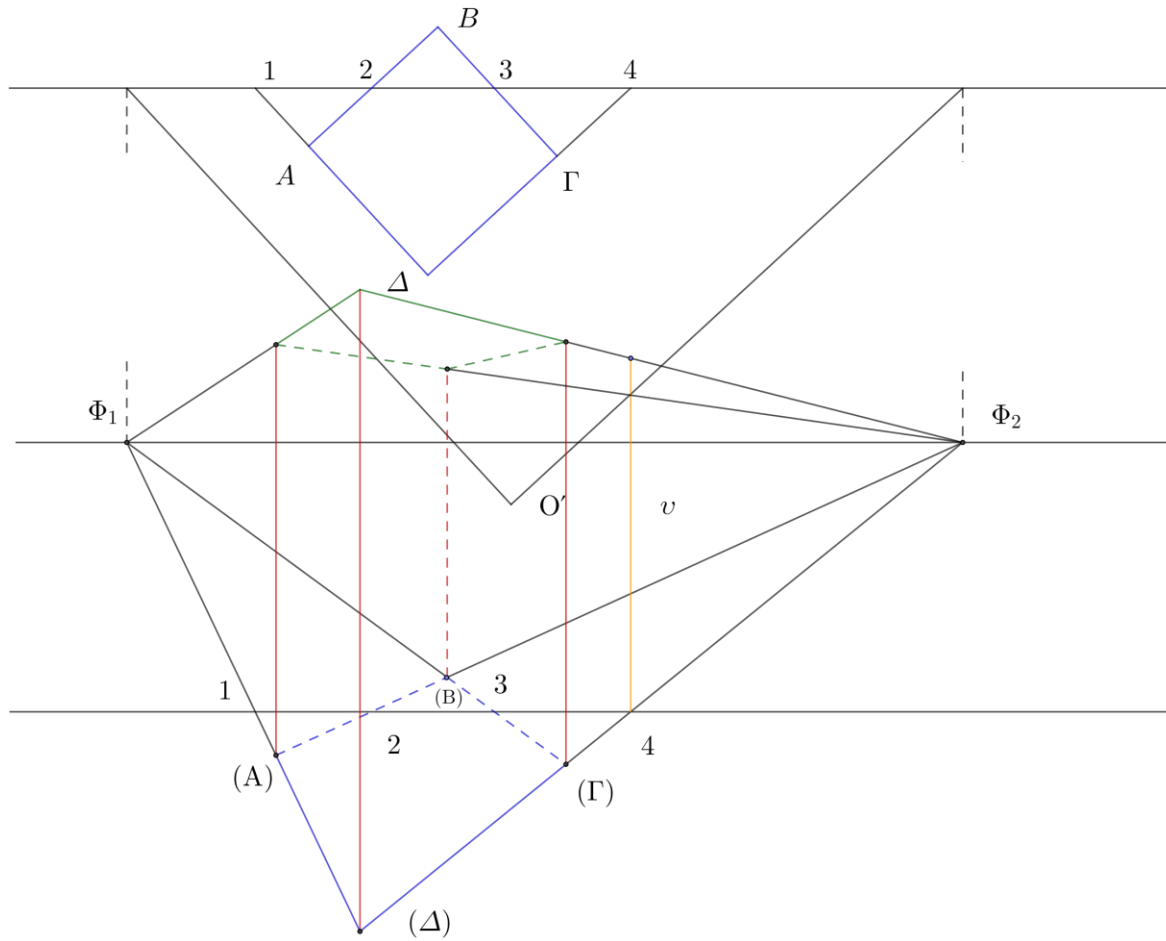


Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το προοπτικό ενός πρίσματος με τετράγωνη βάση και ύψος  $υ$ , μέρος του οποίου βρίσκεται μεταξύ πίνακα και παρατηρητή.



Σχήμα 16γ

Όταν το πρίσμα είναι υψηλότερο του παρατηρητή τότε παίρνουμε την παρακάτω προοπτική του



Σχήμα 16δ

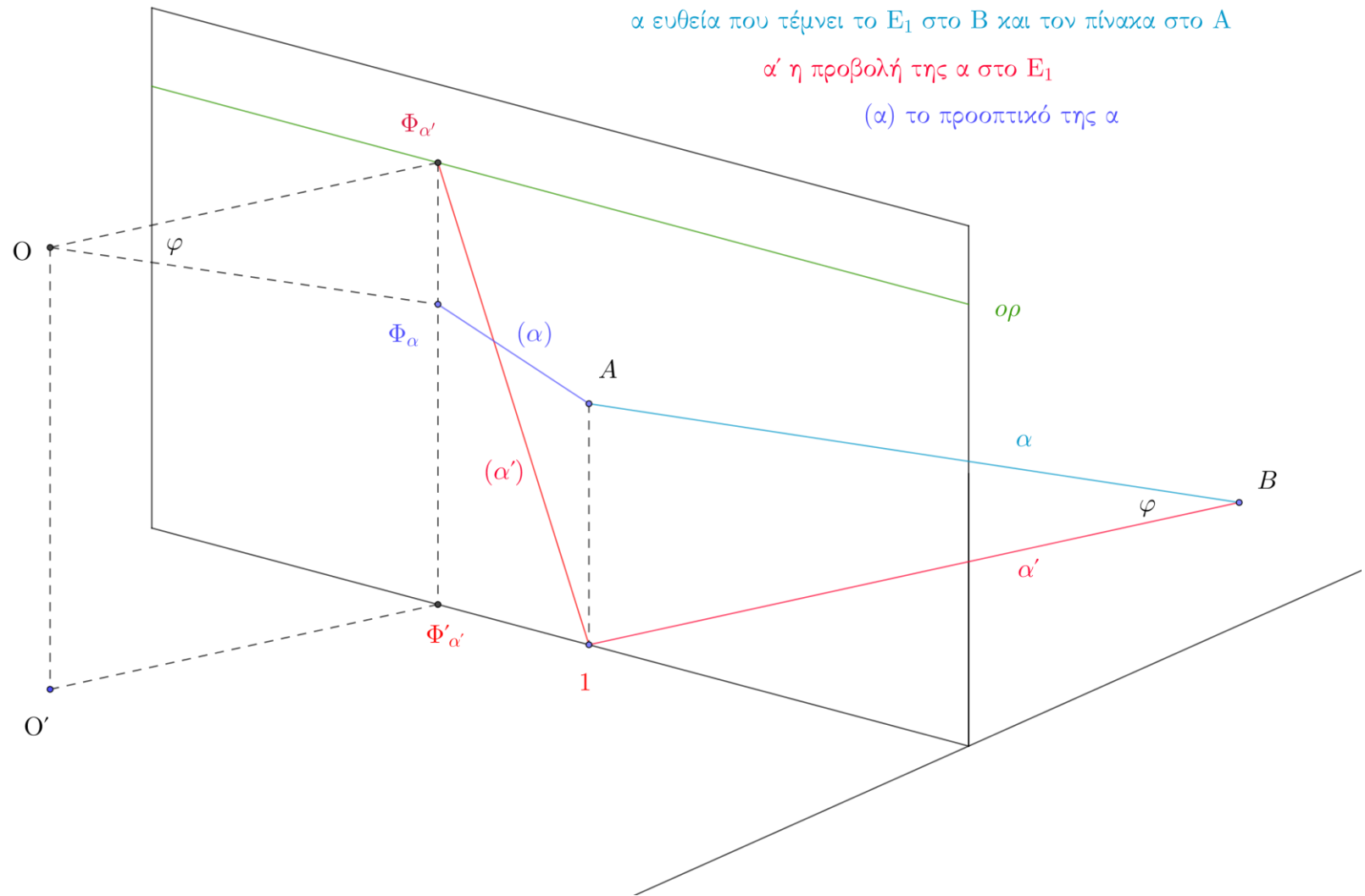


### Προοπτικό τυχαίας ευθείας

Πρώτη περίπτωση: Εξετάζουμε μια ευθεία  $\alpha$  (κόκκινο χρώμα) η οποία τέμνει

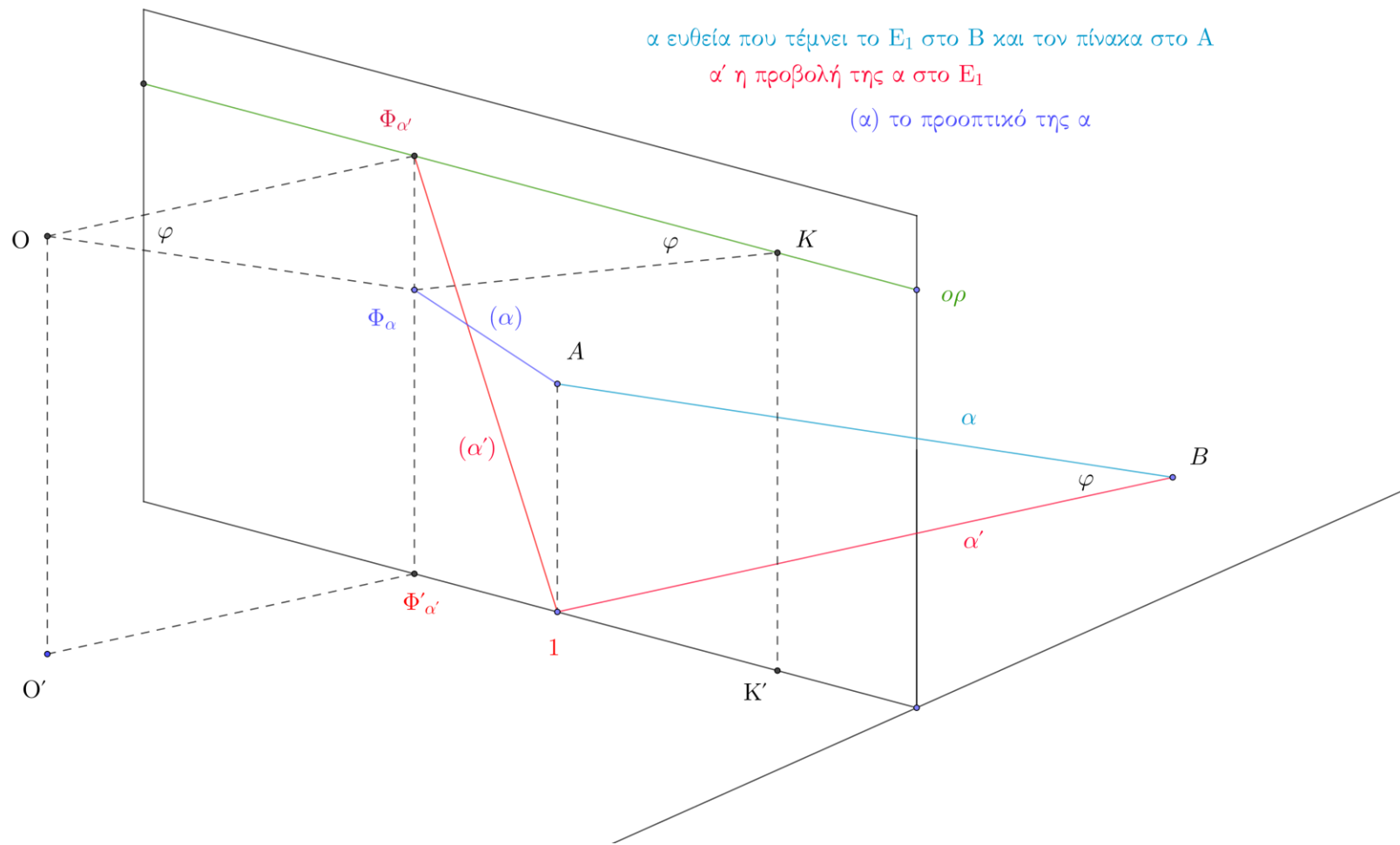
1. τον πίνακα στο σημείο  $A$  πάνω από την βάση και
2. το  $E_1$  στο σημείο  $B$ .

Σχεδιάζουμε την προβολή της η οποία τέμνει την βάση στο σημείο 1. Από το  $O'$  φέρουμε παράλληλη προς αυτήν και από το σημείο τομής της με την βάση, το  $\Phi'_{\alpha'}$ , σχεδιάζουμε κάθετο προς τη βάση η οποία τέμνει τον ορίζοντα στο σημείο φυγής της  $\alpha'$ , το  $\Phi_{\alpha'}$ . Από το  $O$  φέρουμε παράλληλο προς την  $\alpha$  η οποία τέμνει την  $\Phi_{\alpha'}$  στο  $\Phi_{\alpha}$  που είναι το σημείο φυγής της  $\alpha$ . Το προοπτικό της  $\alpha$  είναι η ευθεία  $A\Phi_{\alpha}$ .



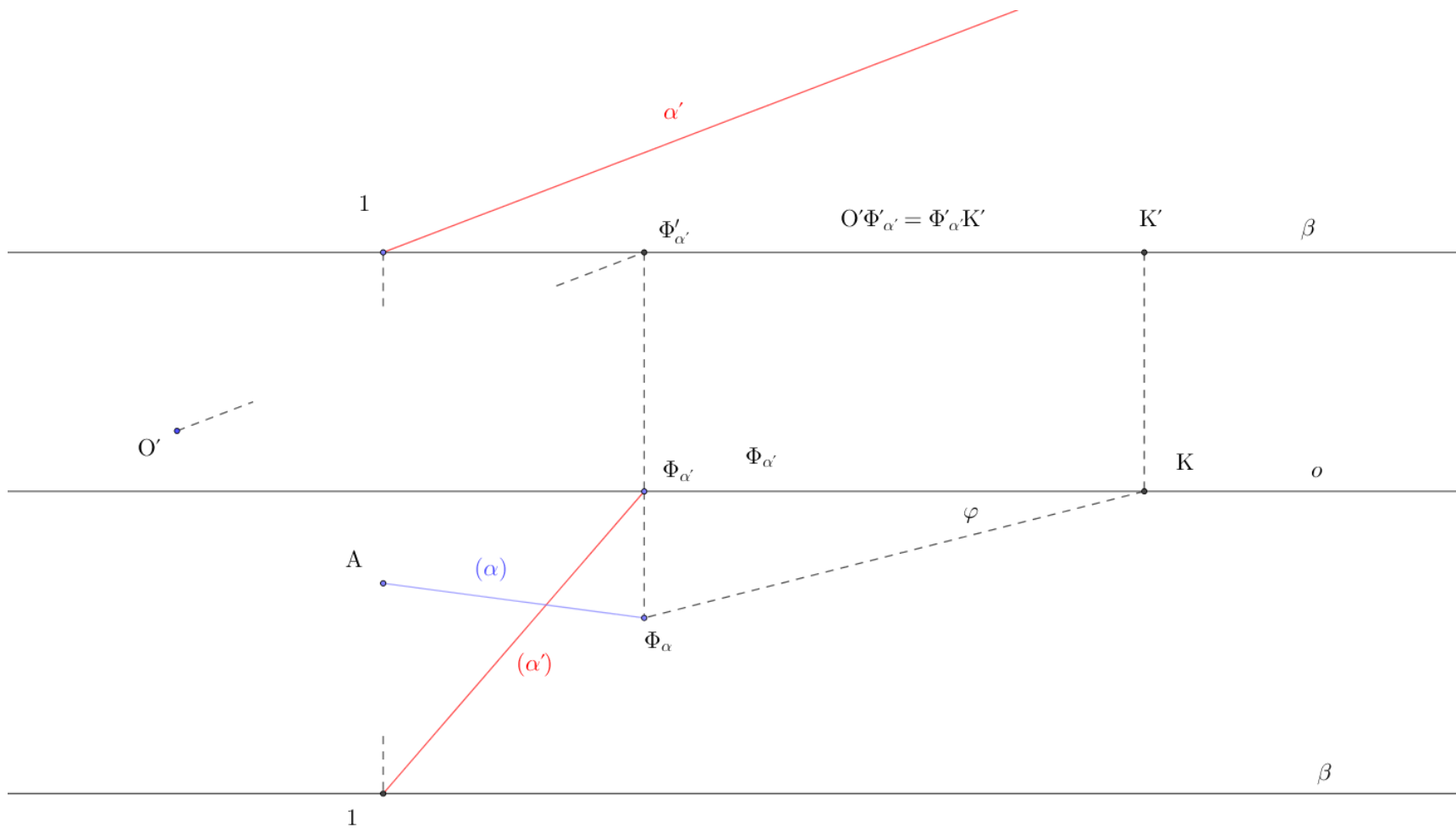
Σχήμα 18

Για να καθορίσουμε εύκολα το  $\Phi_\alpha$  (στο χαρτί σχεδίασης) παίρνουμε ένα σημείο  $K'$  πάνω στην βάση με  $K'\Phi'_{\alpha'} = O'\Phi'_{\alpha'}$ . Η κάθετη από το  $K'$  στον ορίζοντα τον τέμνει στο  $K$ . Από το  $K$  σχεδιάζουμε ευθεία η οποία σχηματίζει με τον ορίζοντα γωνία  $\varphi$ . Η τομή της με την  $\Phi_\alpha\Phi'_{\alpha'}$  είναι το σημείο  $\Phi_\alpha$  (τα τρίγωνα  $O\Phi_\alpha\Phi'_{\alpha'}$  και  $K\Phi_\alpha\Phi'_{\alpha'}$  είναι ίσα).



Σχήμα 19α

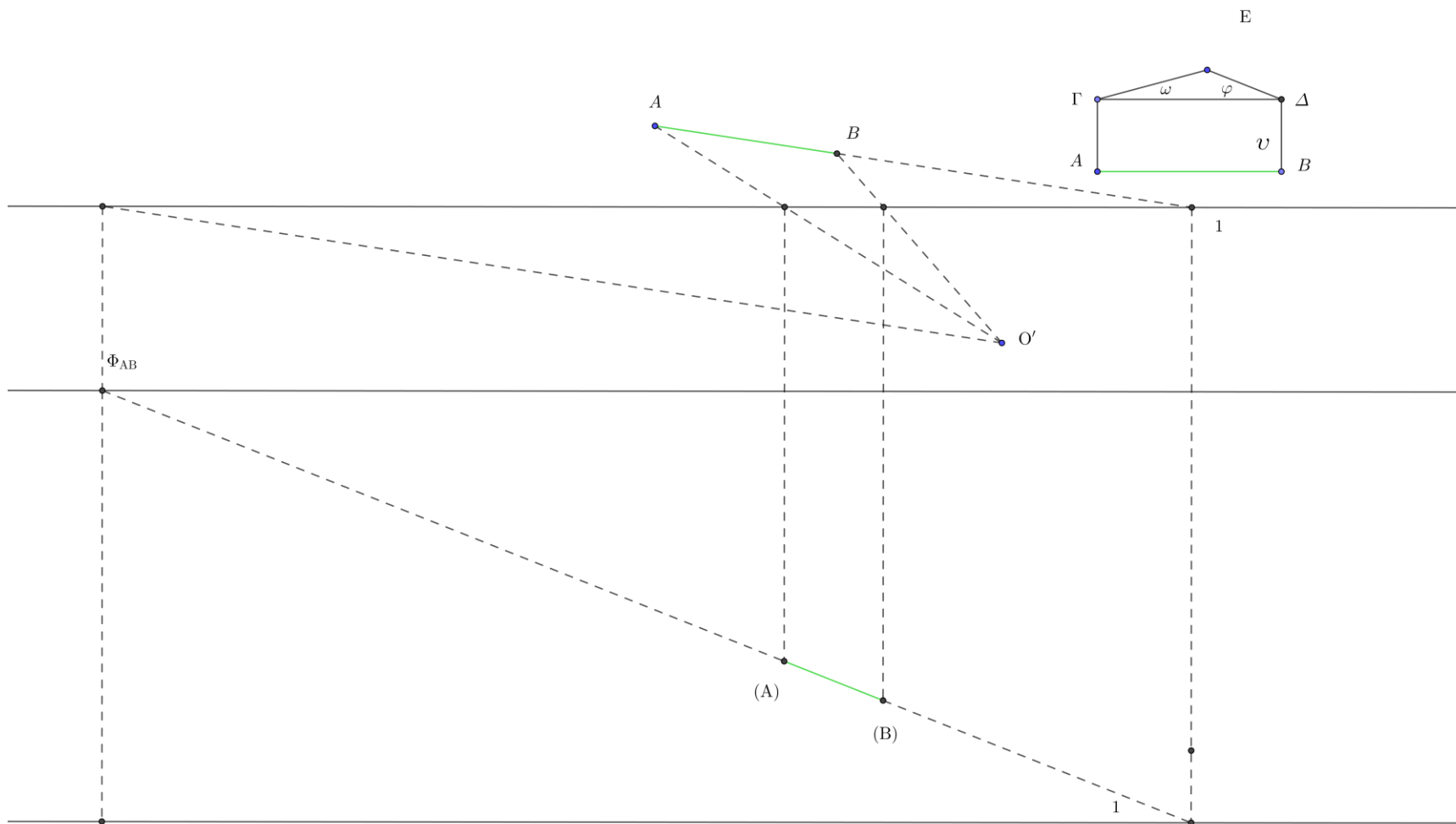
Στο χαρτί σχεδίασης έχουμε



Σχήμα 19β

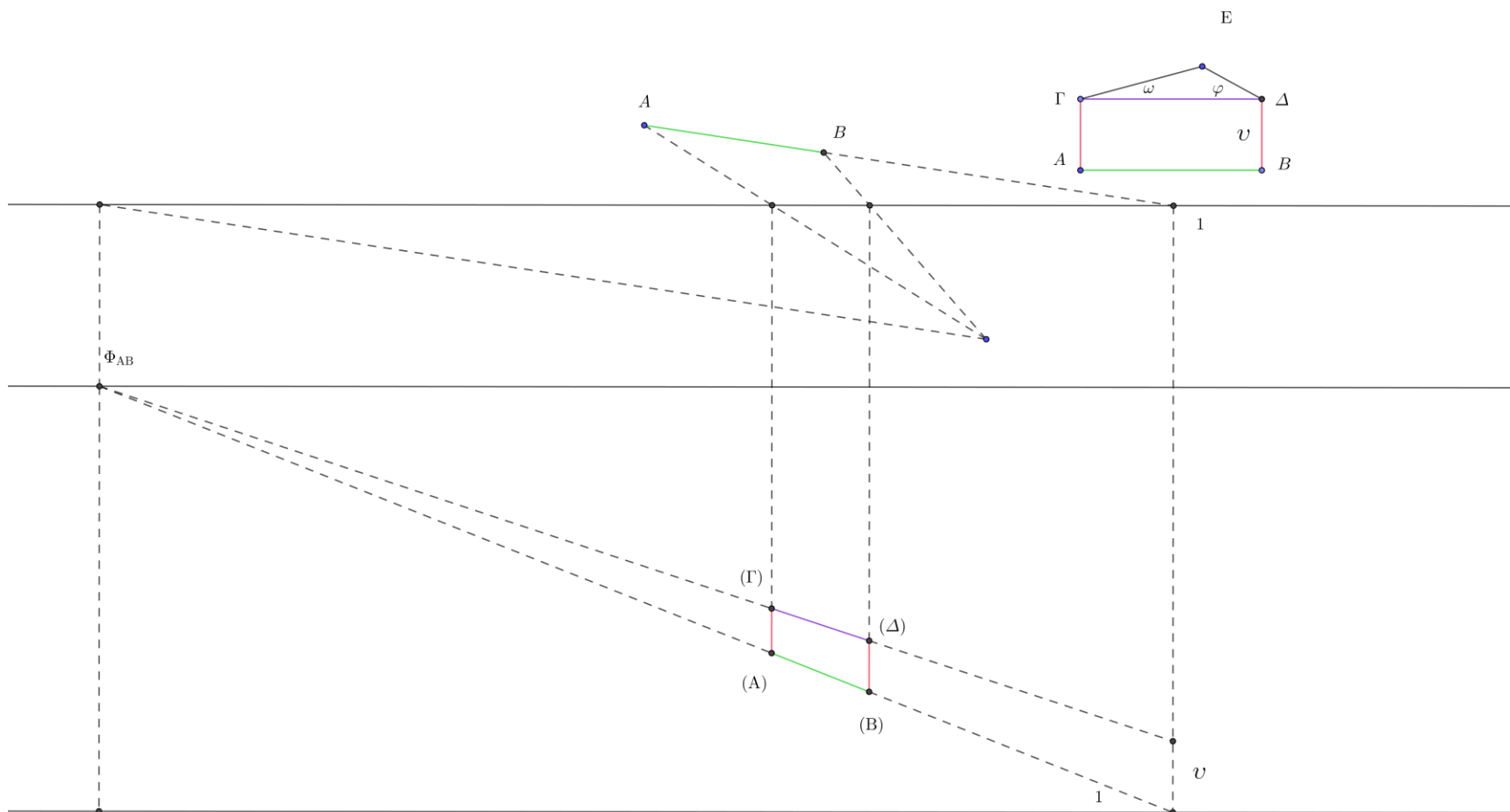


Θα σχεδιάσουμε την προοπτική απεικόνιση της πρόσοψης ενός κτηρίου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ξεκινάμε από την εύρεση του προοπτικού του ευθύγραμμου τμήματος AB.



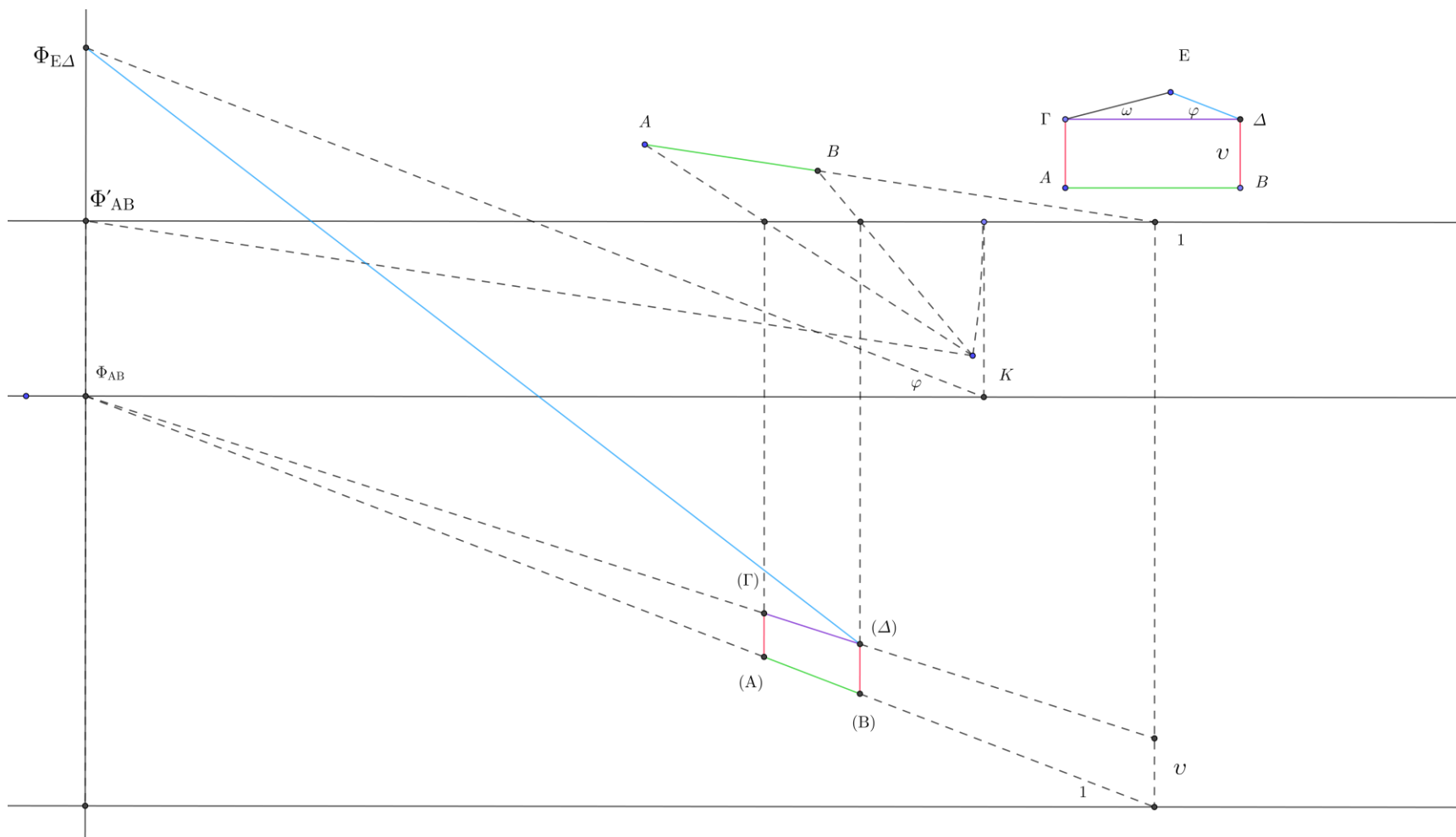
Σχήμα 21

Για τα προοπτικά των Γ, Δ έχουμε:



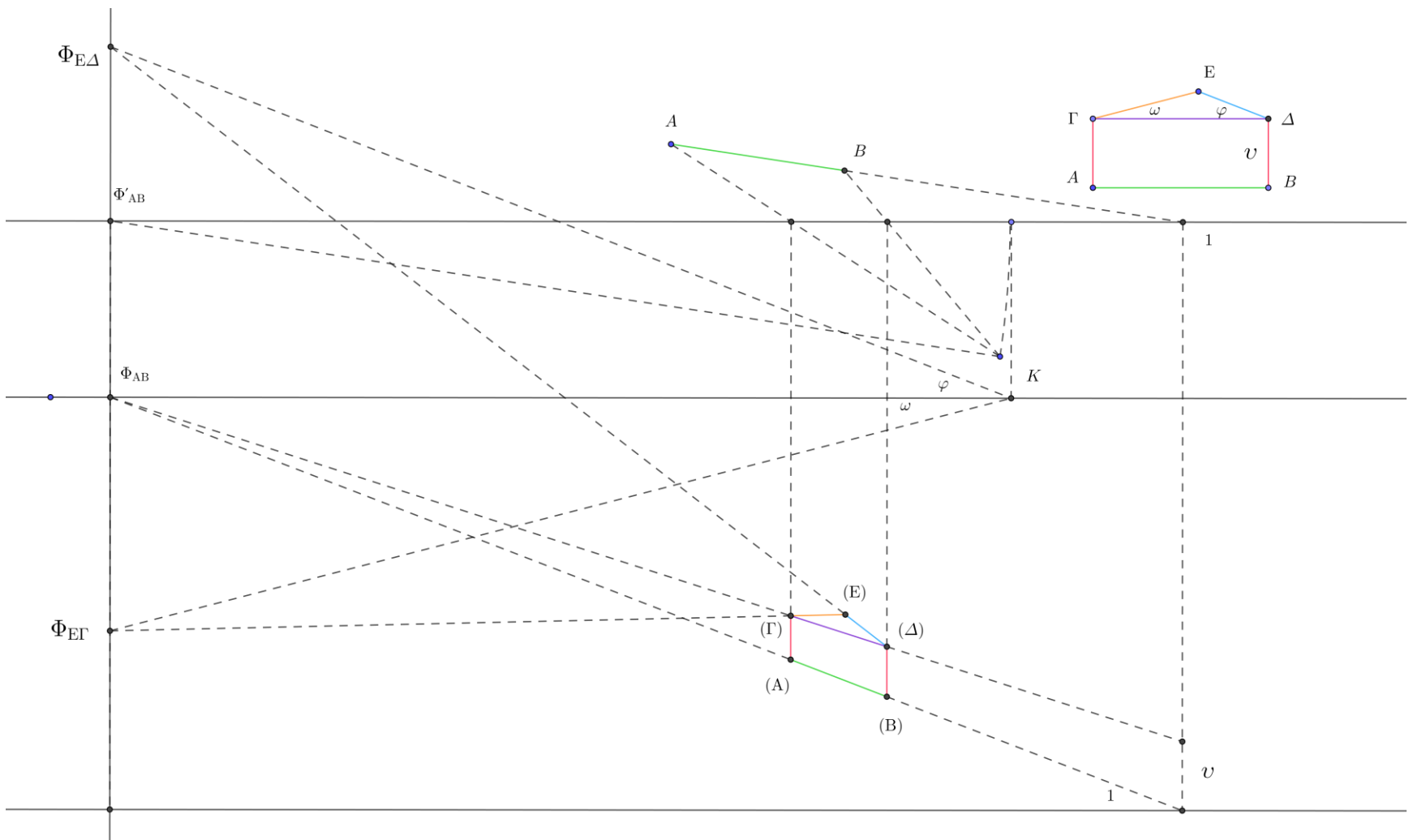
Σχήμα 22

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο που είδαμε στα σχήματα 18 και 20 για να σχεδιάσουμε τις (Γ)(Ε) και (Ε)(Δ):



Σχήμα 23

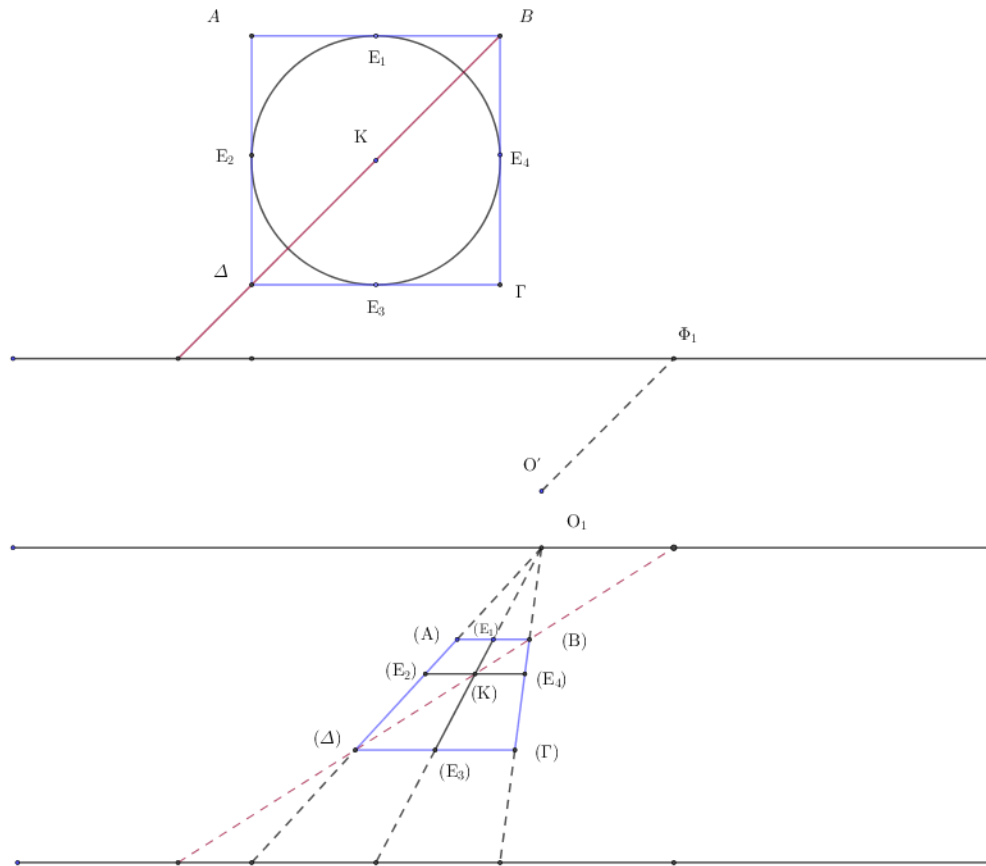




Σχήμα 24β

Προοπτικό κύκλου που βρίσκεται πάνω στο  $E_1$

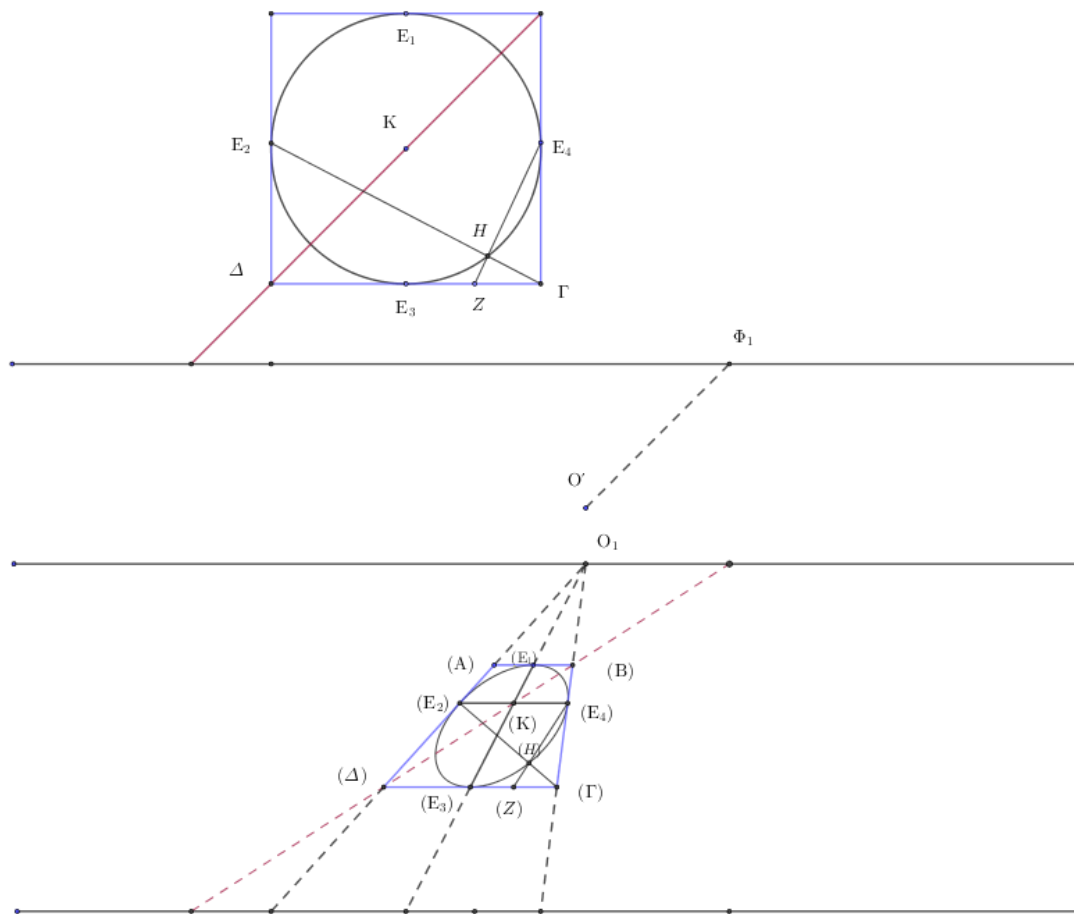
Το ζητούμενο προοπτικό είναι μια έλλειψη. Ξεκινάμε εγγράφοντας τον κύκλο σε ένα τετράγωνο και σχεδιάζουμε το προοπτικό του τετραγώνου.



Σχήμα 25

Η έλλειψη διέρχεται από τα σημεία  $(E_1) - (E_4)$ . Για να την σχεδιάσουμε χρειαζόμαστε ένα πέμπτο σημείο.

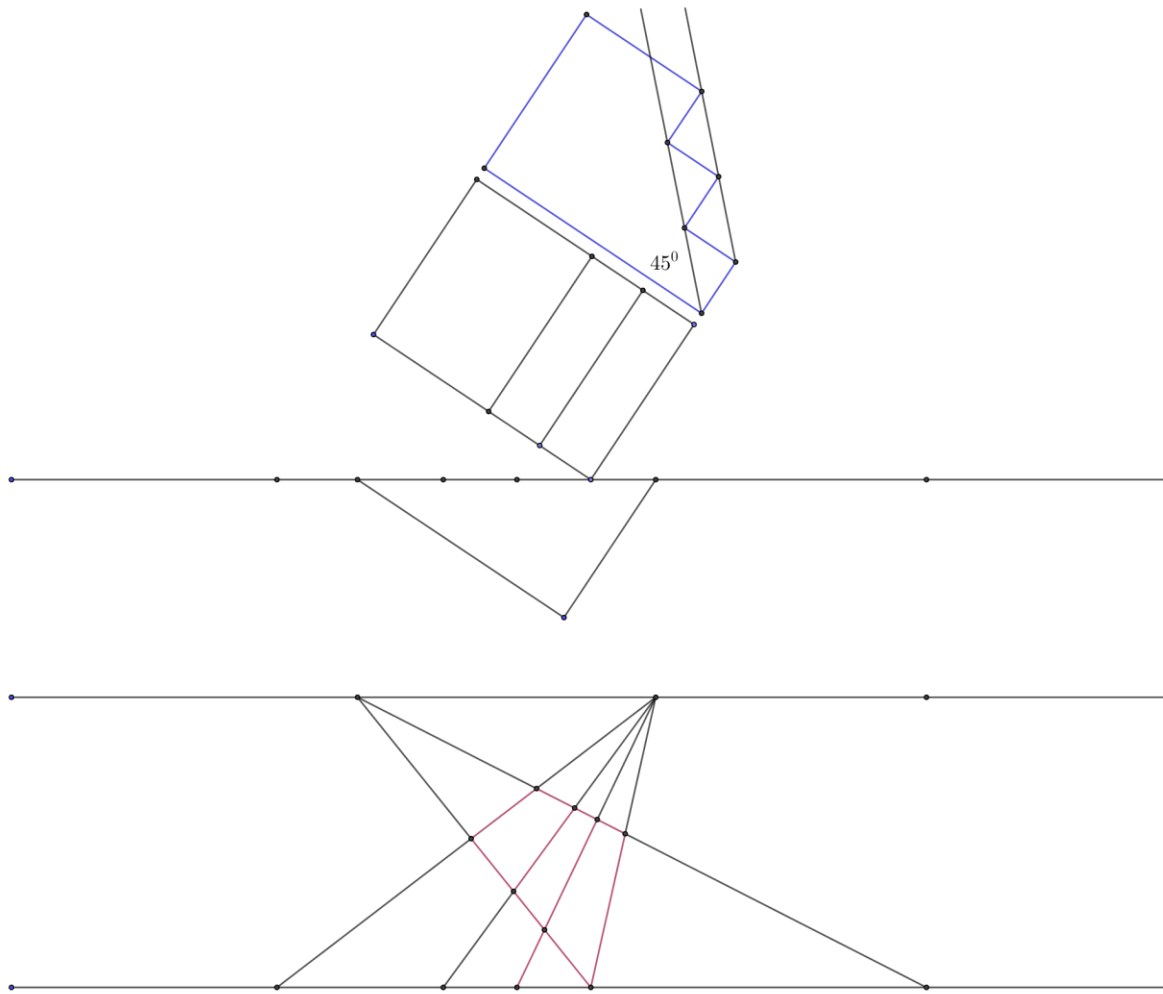
Σχεδιάζουμε την  $E_2\Gamma$  - η οποία τέμνει τον κύκλο στο Η- και την  $E_4H$  η προέκτασή της οποίας τέμνει την  $\Gamma\Delta$  στο Ζ. Αποδεικνύεται ότι το Ζ είναι το μέσον της  $E_3\Gamma$ . Για να σχεδιάσουμε το  $(H)$  βρίσκουμε την τομή της  $(E_2)(\Gamma)$  με την  $(E_4)(Z)$ , όπου  $(Z)$  το μέσον της  $(E_3)(\Gamma)$ .



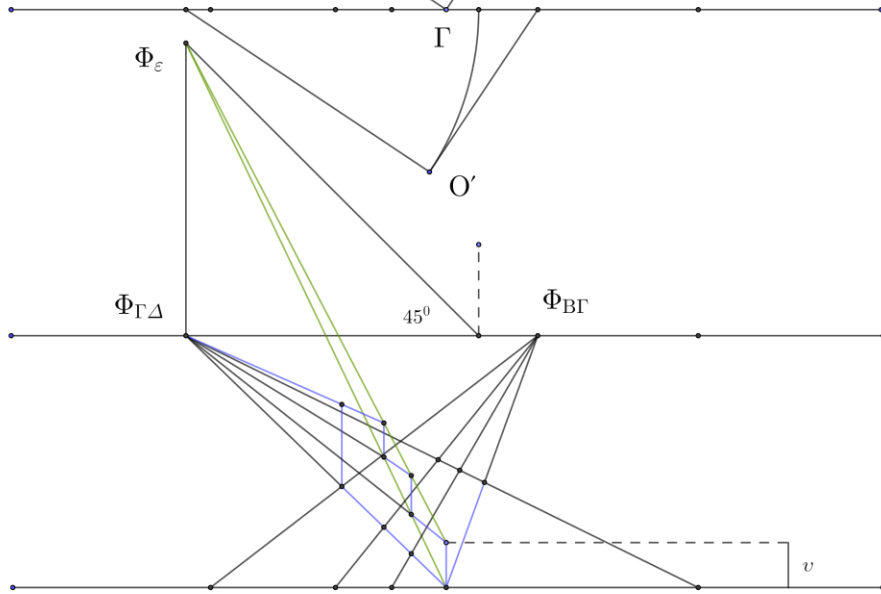
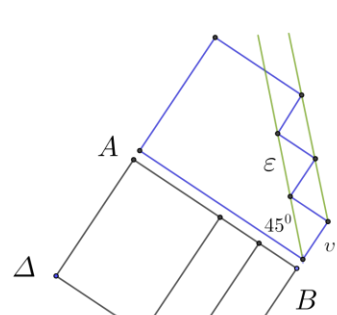
Σχήμα 26

Άσκηση. Να σχεδιάσετε το προοπτικό ενός κυλίνδρου και ενός κώνου με βάσεις πάνω στο  $E_1$  οι οποίοι έχουν ύψος  $v$ .

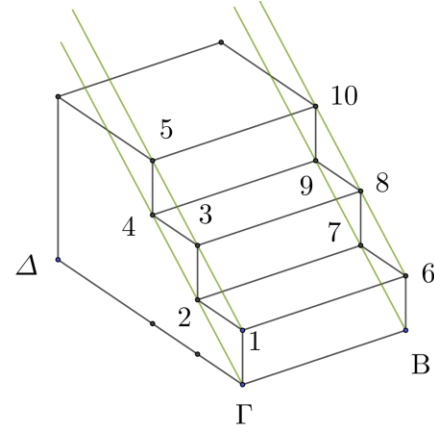
Το προοπτικό μιας σκάλας

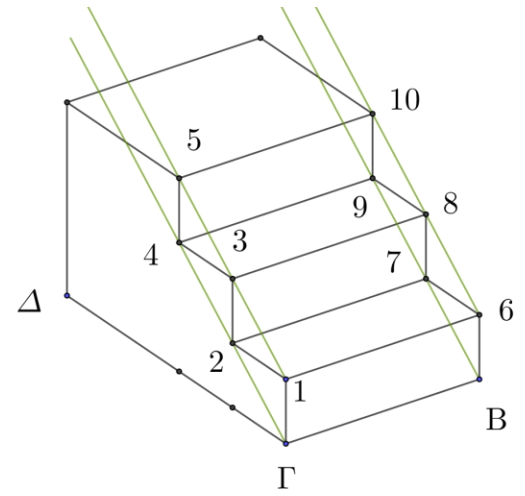
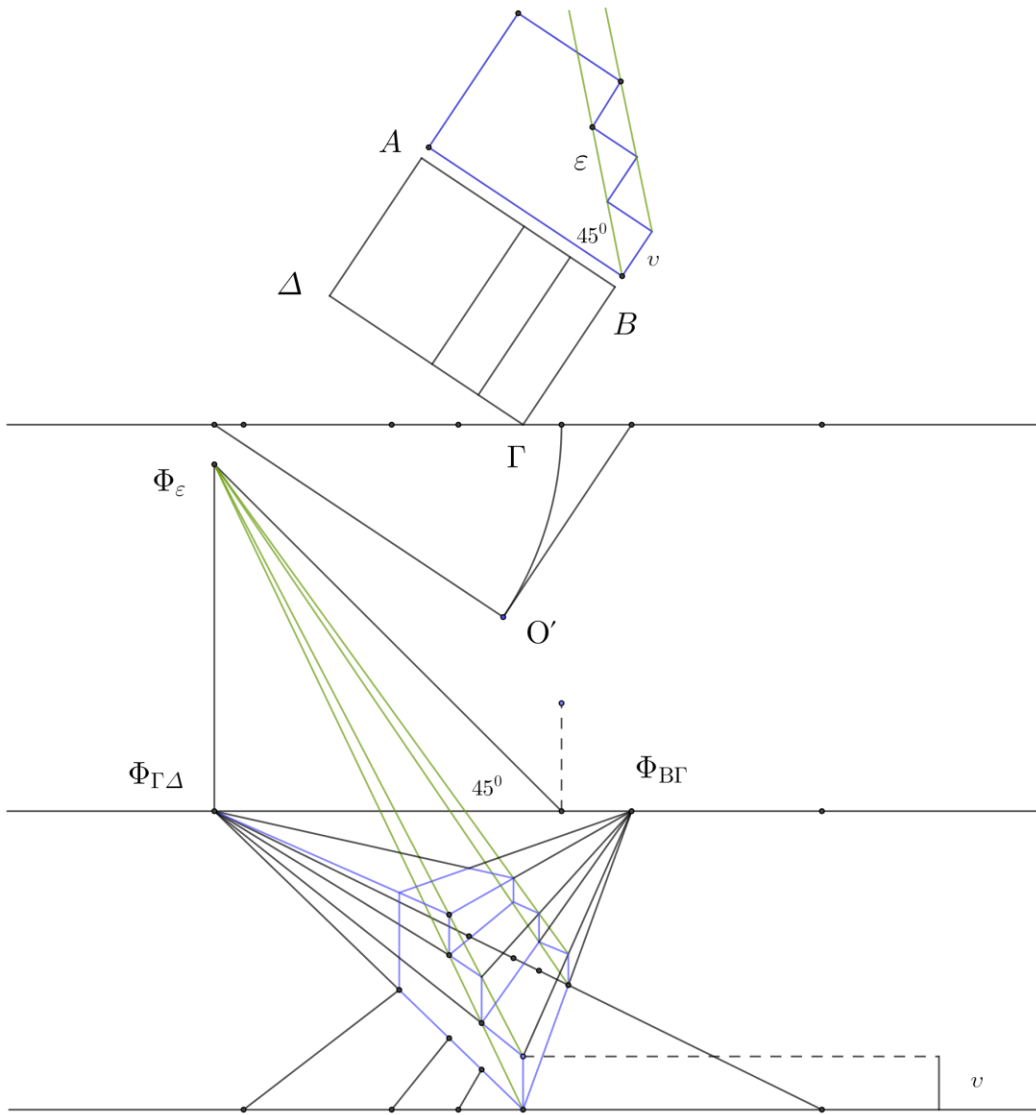


Σχήμα 27



Σχήμα 28





Σχήμα 29

## **Βιβλιογραφία**

Κουρνιατής Ν., Τεχνικές αναπαράστασης με γεωμετρικές μεθόδους και σύγχρονα ψηφιακά μέσα, Εκδόσεις Τζιόλα.  
Λευκαδίτης Γ.Ε., Εξαρχάκος Γ.Μ., Μέθοδοι παραστάσεων, Εκδόσεις Ενέλιξη.