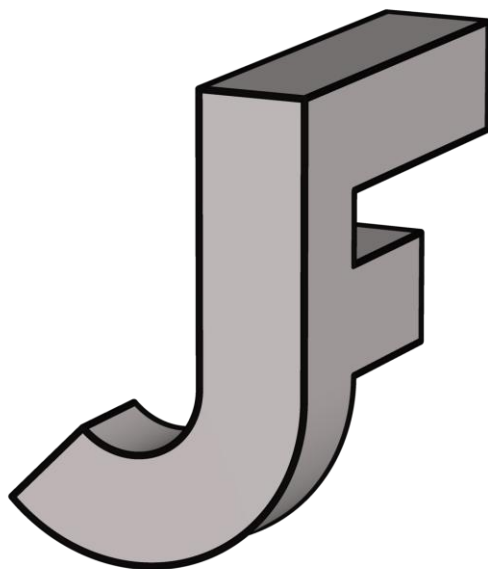


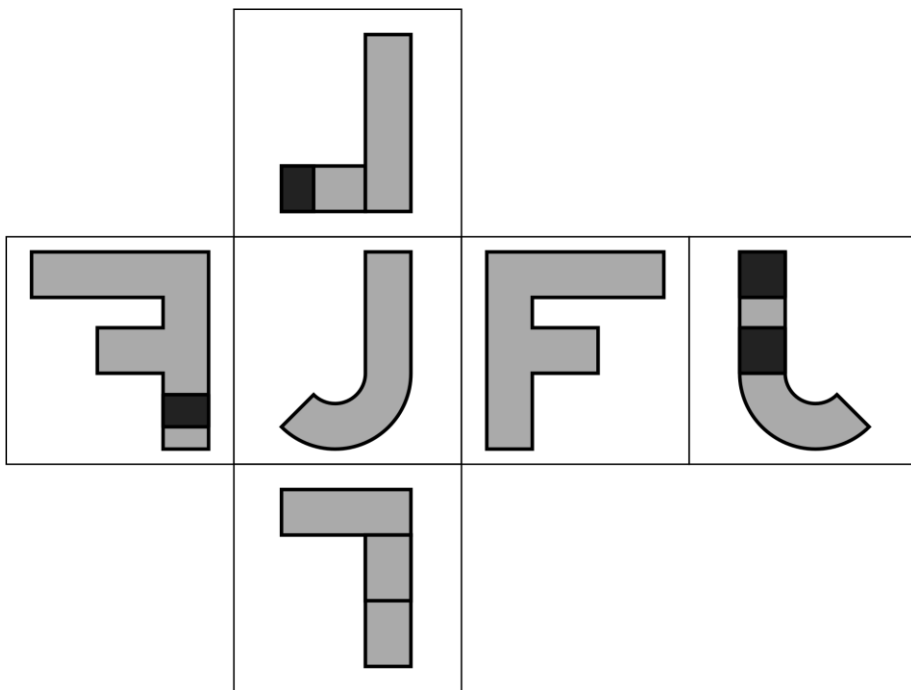


Love comes naturally, hate is taught.

Το σύστημα του Monge

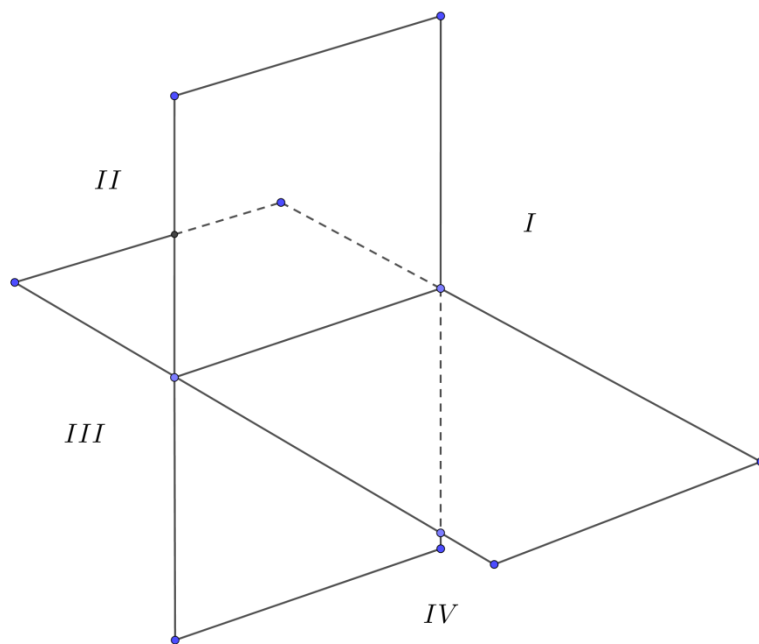
(Gaspard Monge, 1746-1818, Γάλλος μηχανικός, μαθηματικός)





Σχέδιο από wikipedia

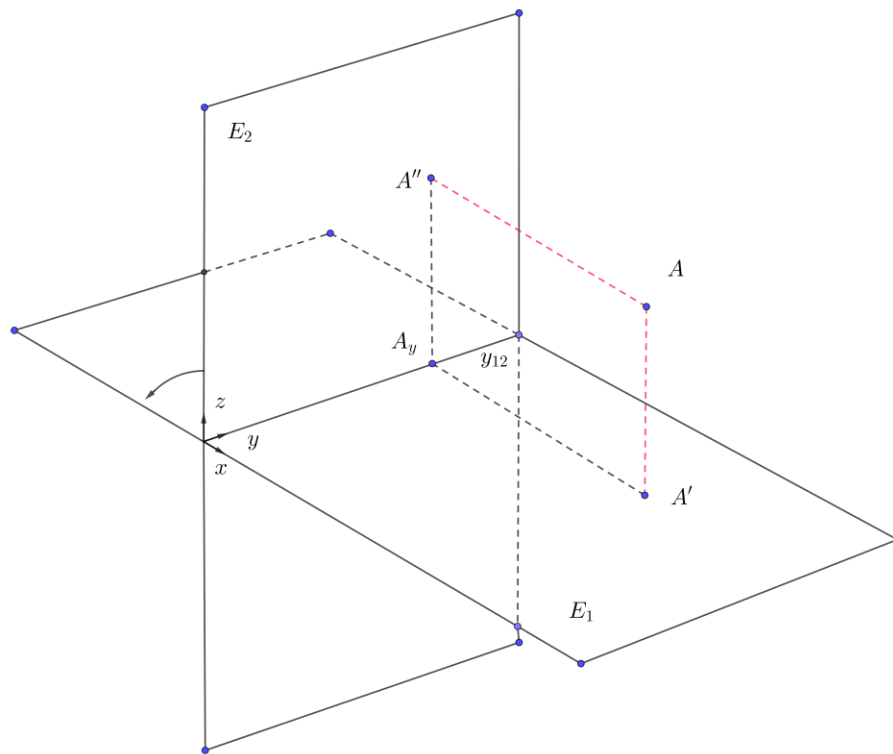
Θεωρούμε δύο κάθετα μεταξύ τους επίπεδα, τα **επίπεδα προβολής**, το οριζόντιο E_1 και το κάθετο E_2 .



Σχήμα 1

Τα επίπεδα χωρίζουν το χώρο σε 4 μέρη I, II, III, IV .

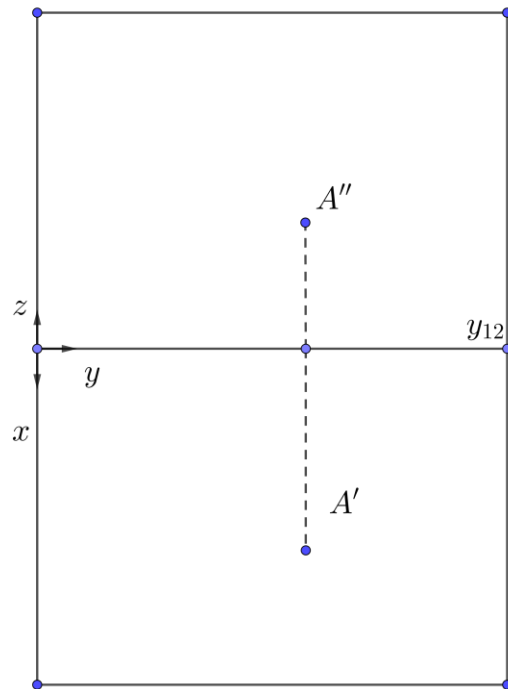
Έστω A ένα τυχαίο σημείο του χώρου, A' η προβολή του στο οριζόντιο επίπεδο και A'' η προβολή του στο κάθετο επίπεδο. Το A' θα λέγεται πρώτη προβολή και το A'' δεύτερη προβολή του A . Συμβολισμός: $A(A', A'')$.



Σχήμα 2

Η x συντεταγμένη του A θα λέγεται **απόσταση** και η z συντεταγμένη του A θα λέγεται **υψόμετρο** του A .

Στρέφουμε κατά 90^0 το κάθετο επίπεδο (**κατάκλιση**) ώστε τα δύο επίπεδα να συμπέσουν, οπότε έχουμε το ακόλουθο σχήμα

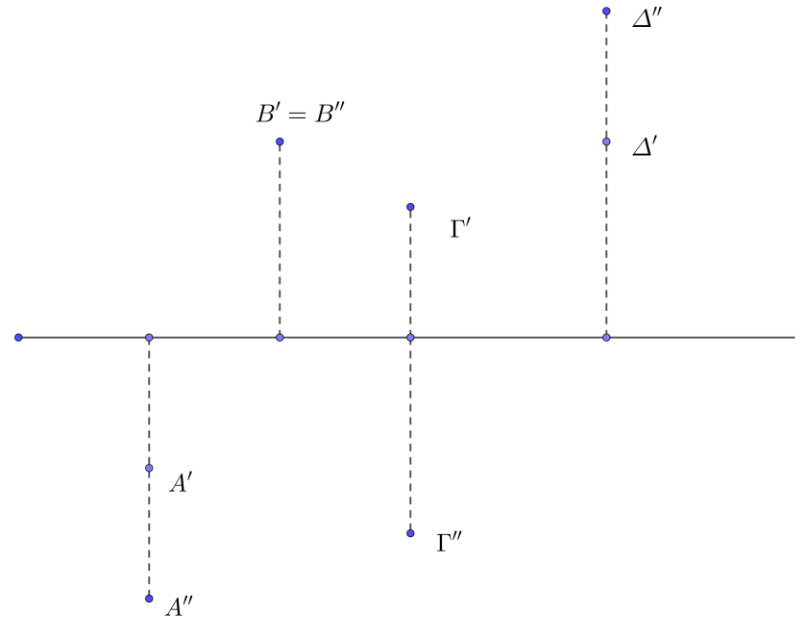


Σχήμα 3

το οποίο εμφανίζεται στο χαρτί σχεδίασης. Στο χαρτί σχεδίασης σχεδιάζουμε μόνο τις πρώτες και τις δεύτερες προβολές των αντικειμένων.

Άσκηση 1

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι προβολές σημείων στο χαρτί σχεδίασης. Να καθορίσετε τη θέση τους στο σύστημα των δύο



επιπέδων E_1, E_2 .

Σχήμα 4

Άσκηση 2

Να σχεδιάσετε τα σημεία $(10, 20, 25)$, $(-10, 30, -20)$, $(10, 30, -20)$ στο σύστημα των επιπέδων E_1, E_2 , και να τα τοποθετήσετε στο χαρτί σχεδίασης.

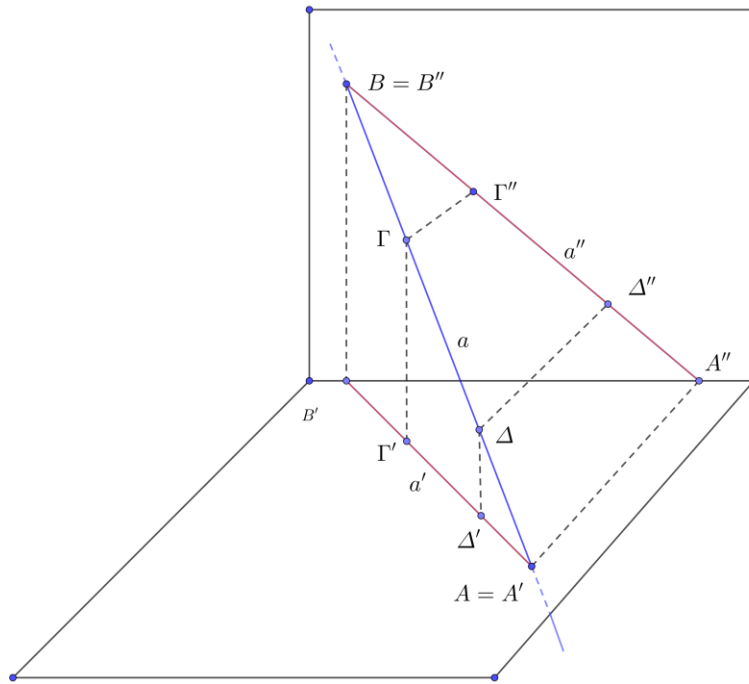
Επίπεδο συμμετρίας: το επίπεδο που διχοτομεί τα μέρη I και III

Επίπεδο σύμπτωσης: το επίπεδο που διχοτομεί τα μέρη II και IV.

Ιδιότητες

Απεικόνιση ευθείας

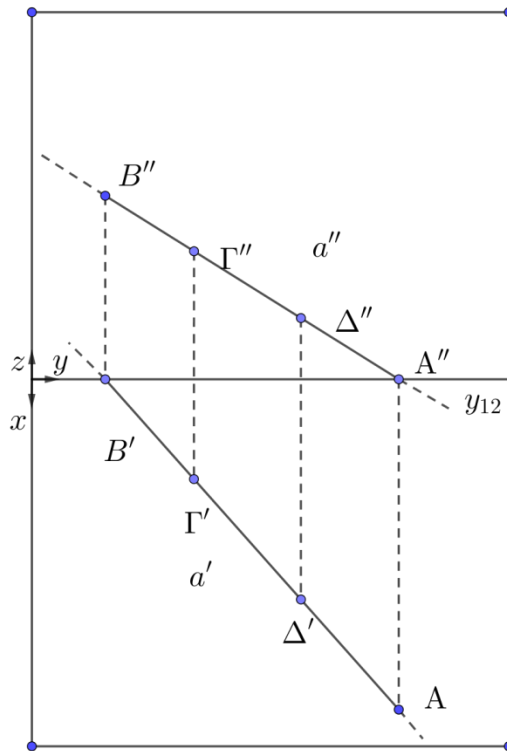
Θεωρούμε μια ευθεία στο χώρο η οποία διέρχεται από τα σημεία Γ, Δ . Υποθέτουμε ότι τέμνει τα επίπεδα στα σημεία A, B , που ονομάζονται ίχνη της ευθείας, όπως στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5

Η α' λέγεται πρώτο ίχνος της ευθείας και η α'' δεύτερο ίχνος της ευθείας.

Στο χαρτί σχεδίασης μετά την κατάκλιση παίρνουμε:



Σχήμα 6

Τα μέρη της ευθείας που δεν βρίσκονται στο μέρος *I* σχεδιάζονται **διακεκομμένα** στο χαρτί σχεδίασης.

Σχετικές θέσεις ευθείας

Κατακόρυφη: κάθετη στο E_1

Οριζόντια: παράλληλη στο E_1

Πρόσθια: κάθετη στο E_2

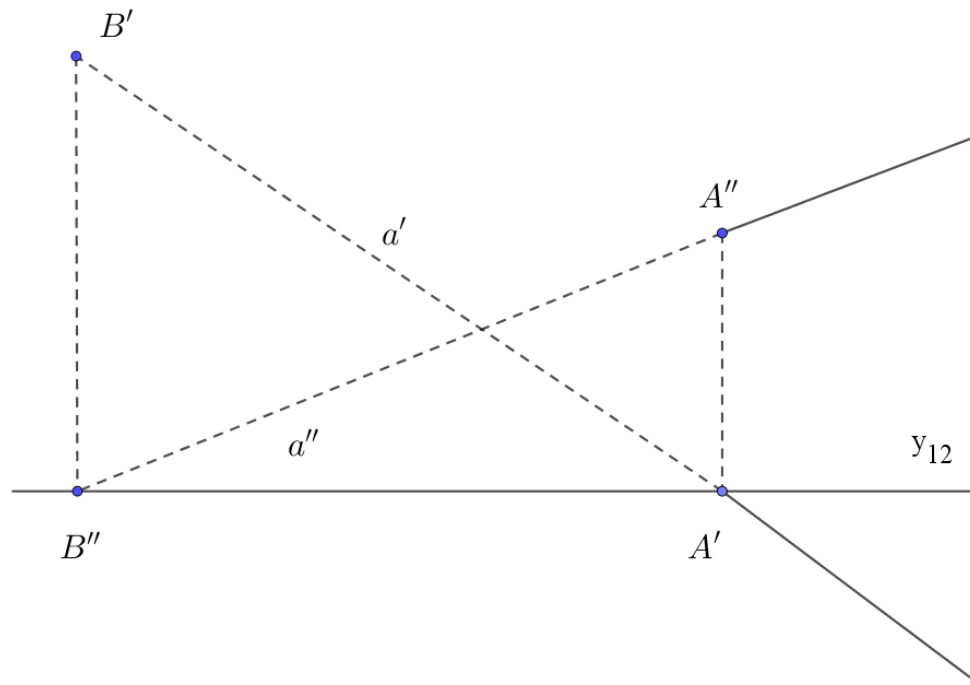
Εγκάρσια: κάθετη στον y_{12} (μπορεί να είναι καθέτως ασύμβατη με τον y_{12})

Μετωπική: παράλληλη στο E_2

Παράλληλη στον y_{12}

Άσκηση 3

Στο χαρτί σχεδίασης δίνονται οι προβολές α' , α'' μιας ευθείας α :

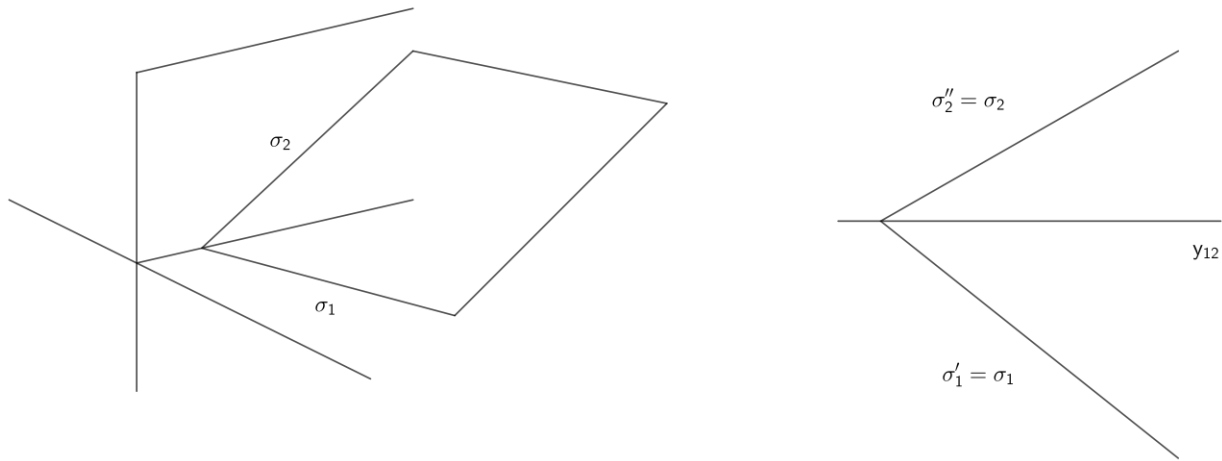


Σχήμα 7

Να σχεδιάσετε την ευθεία στο σύστημα των δύο επιπέδων E_1, E_2 .

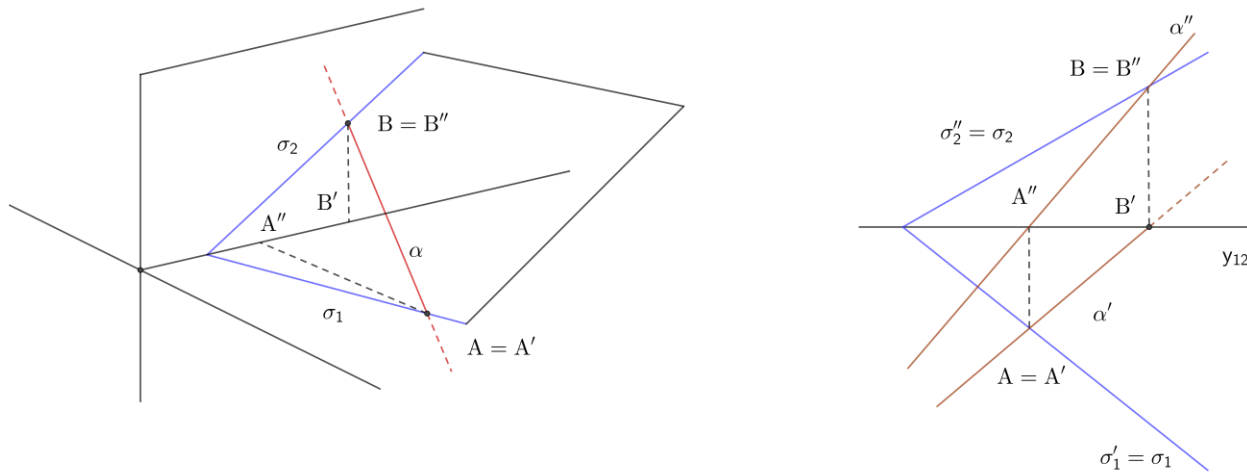
Απεικονίσεις επιπέδων

Το επίπεδο σ τέμνει το E_1 σε μια ευθεία σ_1 και το E_2 σε μία ευθεία σ_2 . Η σ_1 λέγεται **πρώτο ίχνος** του σ και η σ_2 το **δεύτερο ίχνος** του σ .



Σχήμα 8

Μια ευθεία α βρίσκεται πάνω στο επίπεδο σ αν τέμνει τις σ_1 και σ_2 ή τέμνει την μία και είναι παράλληλη στην άλλη.

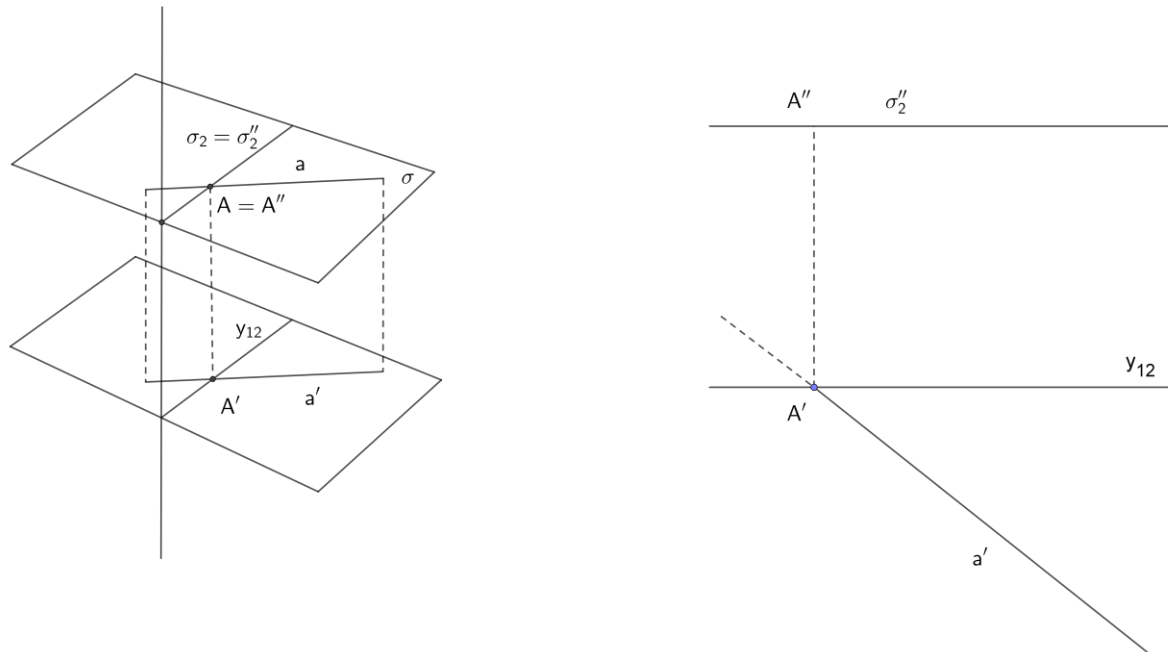


Σχήμα 9

Σχετικές θέσεις επιπέδων

Οριζόντιο επίπεδο: Παράλληλο προς το E_1

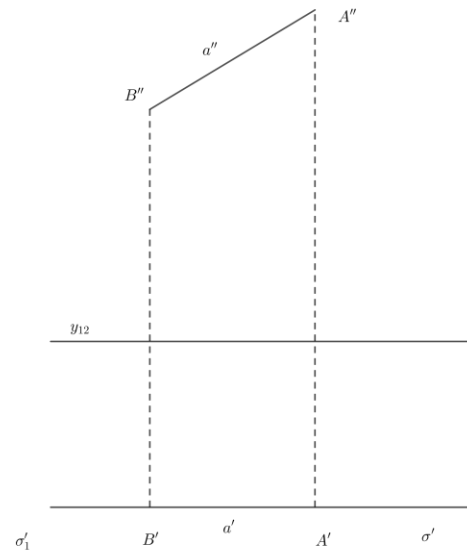
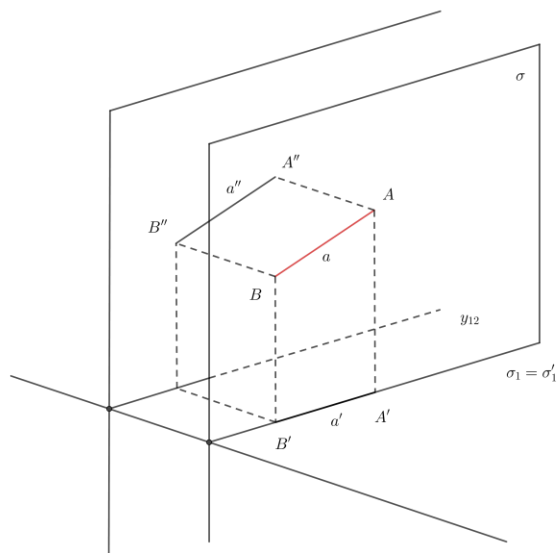
Το επίπεδο έχει μόνον δεύτερο ίχνος σ_2'' . Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάστηκε επίσης ένα ευθύγραμμο τμήμα a που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο.



Σχήμα 10

Μετωπικό επίπεδο: Παράλληλο προς το E_2

Το επίπεδο έχει μόνον πρώτο ίχνος σ_1'' . Στο παρακάτω σχήμα σχεδιάστηκε επίσης ένα ευθύγραμμο τμήμα α που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο.



Σχήμα 11

Ομοίως απεικονίζονται τα παρακάτω επίπεδα:

Κατακόρυφο επίπεδο: Κάθετο προς το E_1

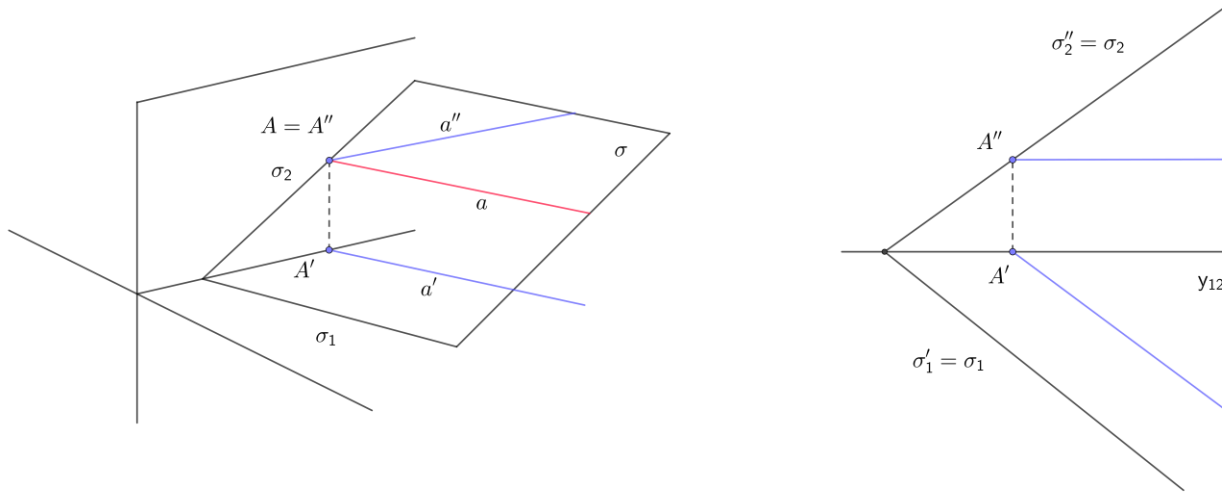
Πρόσθιο επίπεδο: Κάθετο προς το E_2

Εγκάρσιο επίπεδο: Κάθετο προς τα E_1, E_2

Επίπεδο που διέχεται απο τον άξονα $y_{1,2}$

Επίπεδο που είναι παράλληλο προς τον άξονα $y_{1,2}$

Ιχνοπαράλληλοι



Σχήμα 12

Κάθε ευθεία του επιπέδου σ λέγεται **πρώτη ιχνοπαράλληλος** αν είναι παράλληλη στο πρώτο ίχνος του σ_1 , οπότε είναι επίσης παράλληλη στο επίπεδο E_1 . Δείτε το προηγούμενο σχήμα.

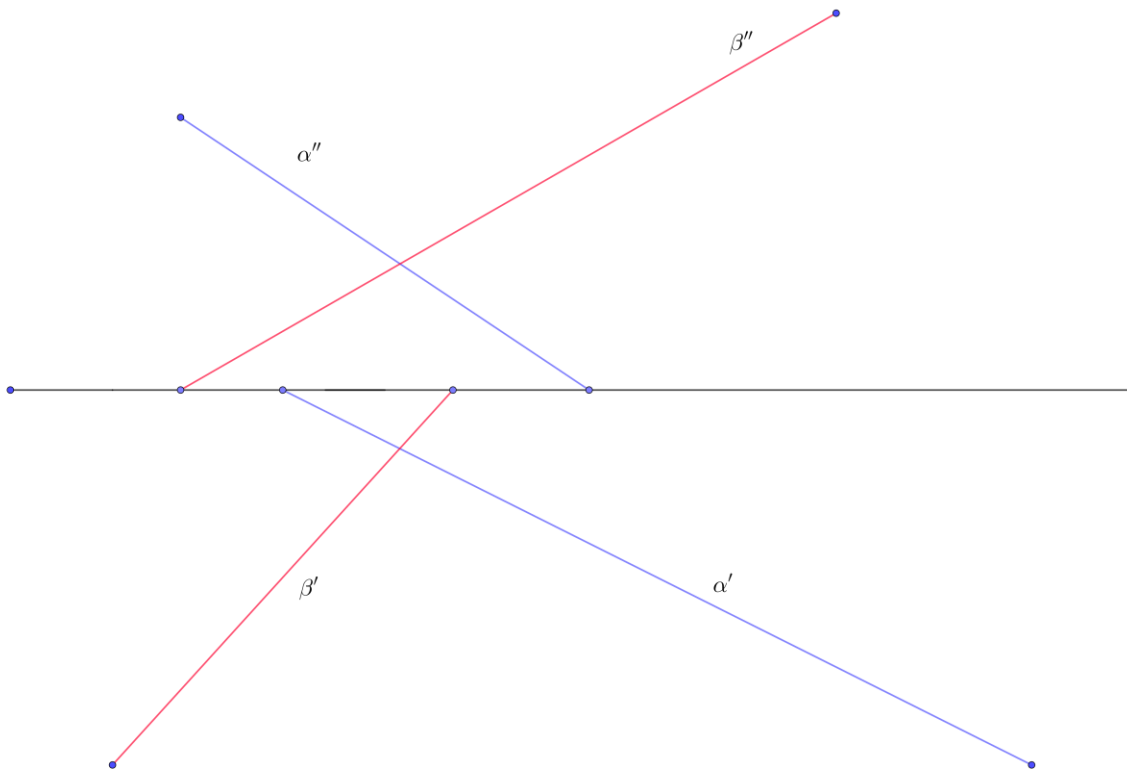
Ομοίως, κάθε ευθεία του επιπέδου σ λέγεται **δεύτερη ιχνοπαράλληλος** αν είναι παράλληλη στο δεύτερο ίχνος του σ_2 , οπότε είναι επίσης παράλληλη στο επίπεδο E_2 .

Ασκήσεις 4

1. Δίνεται ένα επίπεδο σ με ίχνη σ_1, σ_2 . Να σχεδιάσετε μια δεύτερη ιχνοπαράλληλό του.
2. Στο χαρτί σχεδίασης δίνονται τα ίχνη σ_1, σ_2 ενός επιπέδου σ και η πρώτη προβολή Γ' ενός σημείου Γ . Να βρείτε την δεύτερη προβολή Γ'' του Γ .

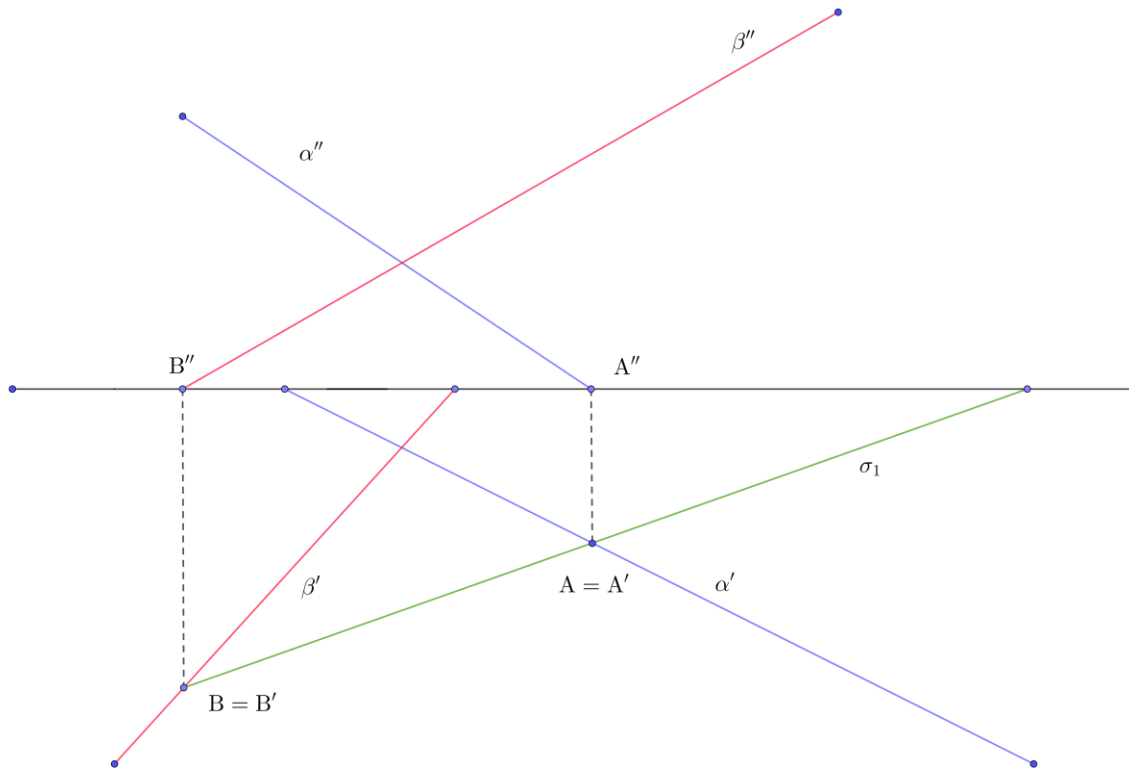
Πως βρίσκουμε τα ίχνη ενός επιπέδου όταν αυτό περιλαμβάνει δύο δοσμένες τεμνόμενες ευθείες

Γνωρίζουμε τις πρώτες προβολές α' , β' και τις δεύτερες προβολές α'' , β'' δύο ευθειών α , β . Θα βρούμε το πρώτο και το δεύτερο ίχνος του επιπέδου σ που περιέχει τις α , β .



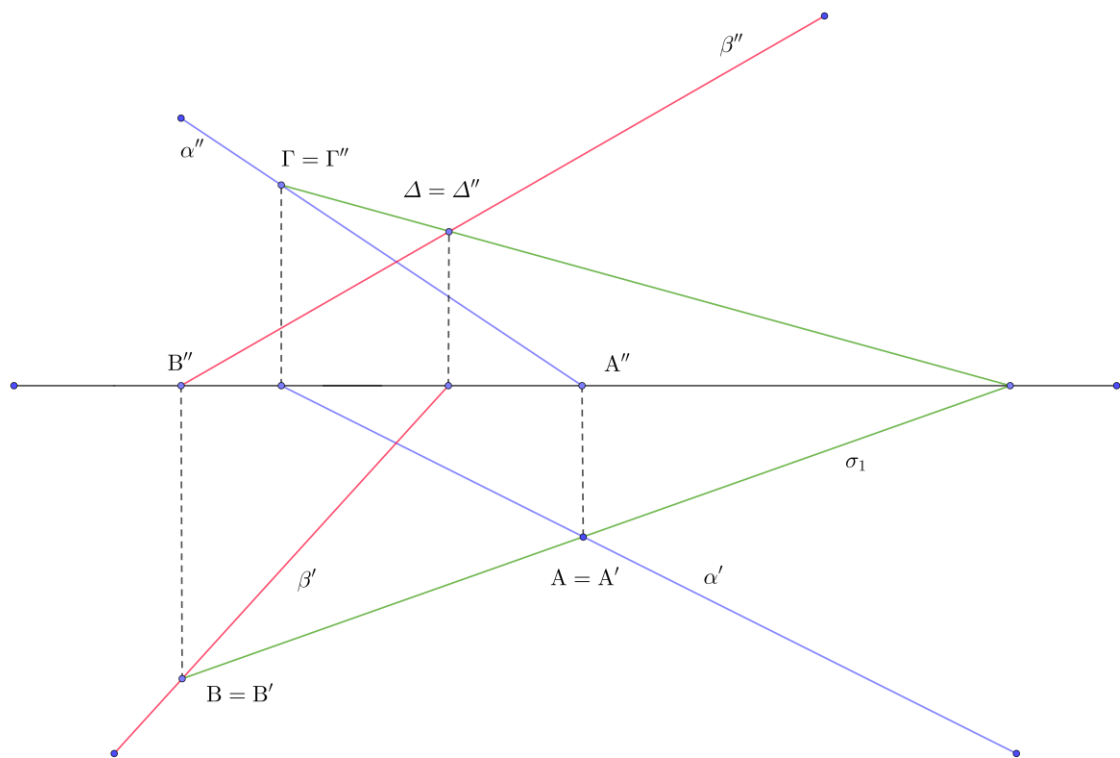
Σχήμα 14

Θα βρούμε δύο σημεία της σ_1 . Το σημείο A είναι σημείο της α , άρα σημείο του σ . Ομοίως, το σημείο B είναι σημείο της β , άρα σημείο του σ . Άρα η σ_1 διέρχεται από τα A, B.



Σχήμα 15

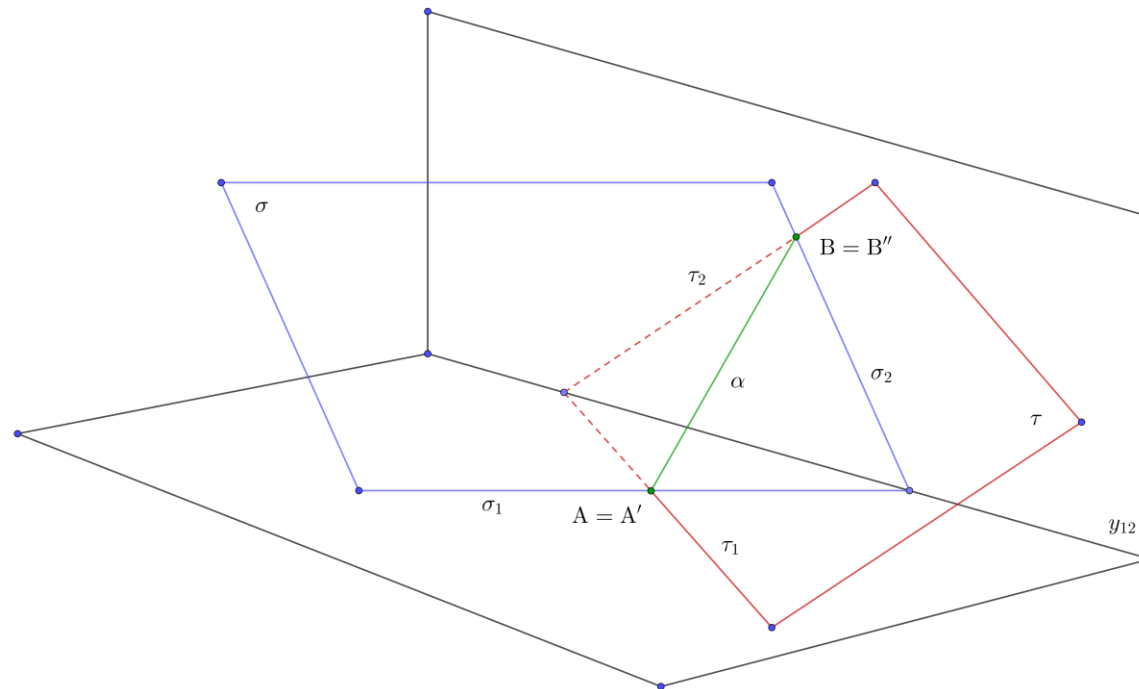
Ομοίως βρίσκουμε τα σημεία Γ, Δ απο τα οποία διέρχεται η σ_2 .



Σχήμα 16

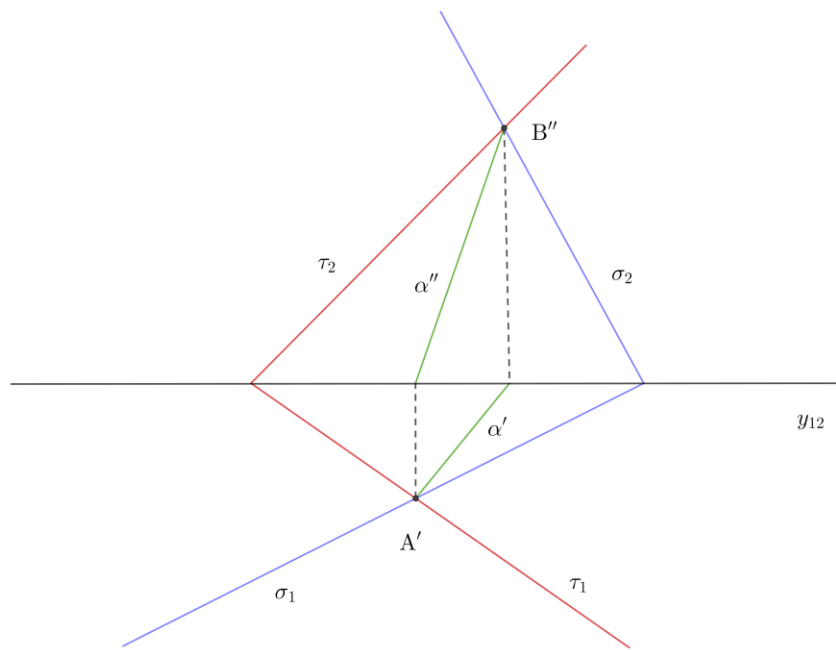
Τομή δύο επιπέδων

Δίνονται ένα επίπεδο σ με ίχνη σ_1, σ_2 και ένα επίπεδο τ με ίχνη τ_1, τ_2 . Τα επίπεδα αυτά τέμνονται στην ευθεία η οποία διέρχεται από την τομή των σ_1, τ_1 και την τομή των σ_2, τ_2 , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 17

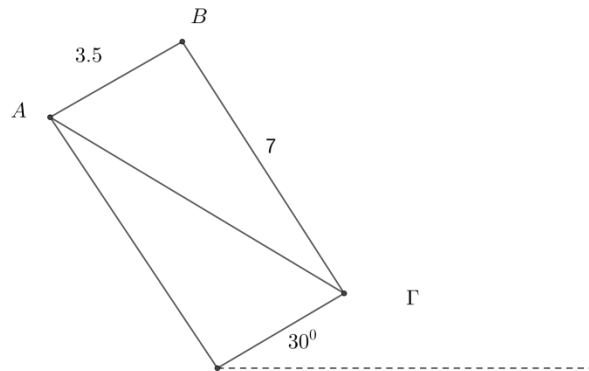
Στο χαρτί σχεδίασης έχουμε



Σχήμα 18

Ασκήσεις 5

1. Να υπολογίσετε τα μήκη των προβολών των ευθυγράμμων τμημάτων AB , $B\Gamma$, $A\Gamma$ πάνω στον άξονα y .



Σχήμα 19

2. Δίνεται ένας κύβος με μήκος ακμής 10 μονάδες που θεωρείται τοποθετημένος σε οριζόντια θέση στο επίπεδο E_1 του συστήματος των δύο επιπέδων του Monge. Το σημείο τομής των διαγωνίων της βάσης βρίσκεται στο σημείο $(30, 30, 0)$.

Να σχεδιάσετε την πρώτη και την δεύτερη προβολή του κύβου

(α) στο σύστημα Monge

(β) στο χαρτί σχεδίασης

όταν

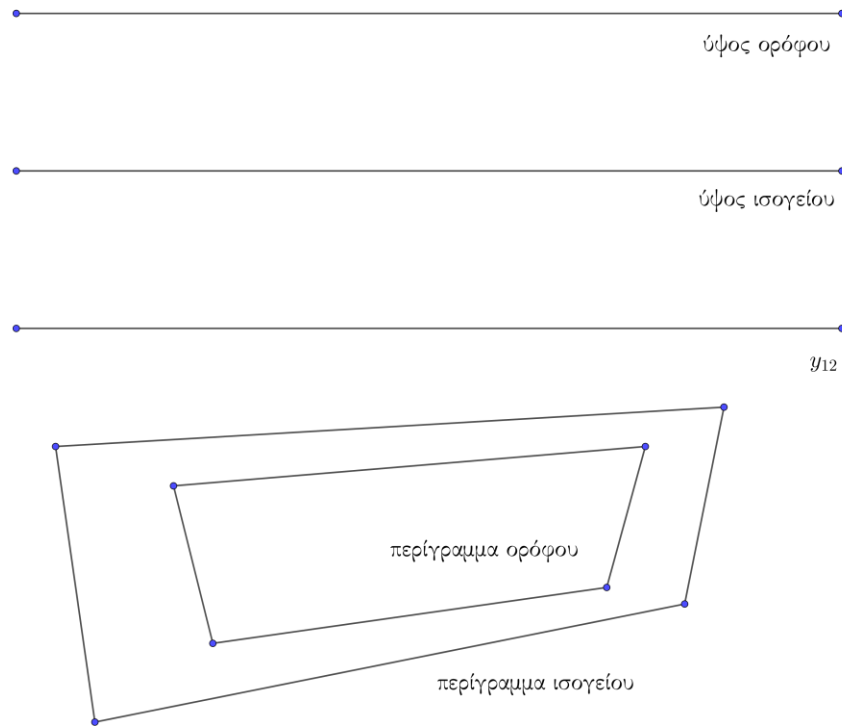
- μια ακμή της βάσης του κύβου είναι παράλληλη στον άξονα y_{12} .
- μια ακμή της βάσης του κύβου σχηματίζει με τον άξονα y_{12} γωνία 45° .
- μια ακμή της βάσης του κύβου σχηματίζει με τον άξονα y_{12} γωνία 30° .

4. Θεωρούμε ένα ορθό κανονικό κύλινδρο ύψους 10 μονάδων με ακτίνα βάσης μήκους 5 μονάδων που είναι τοποθετημένος στο επίπεδο E_1 του συστήματος των δύο επιπέδων του Monge και δεν τέμνει τον άξονα y_{12} . Ο άξονάς του σχηματίζει (ασύμβατη) γωνία 90° με τον άξονα y_{12} . Να σχεδιάσετε την πρώτη και την δεύτερη προβολή του κυλίνδρου

(α) στο σύστημα Monge

(β) στο χαρτί σχεδίασης.

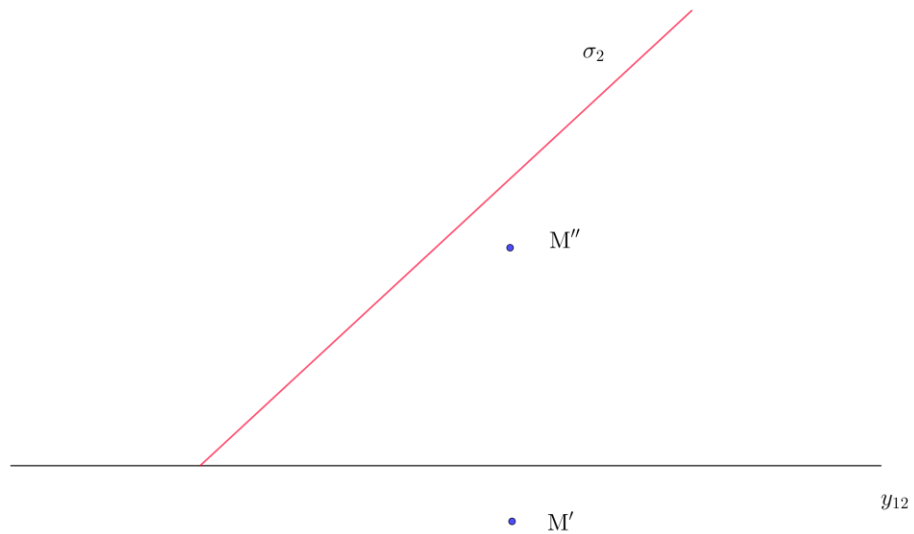
5. Στο χαρτί σχεδίασης δίνεται η κάτοψη ενός κτιρίου. Να σχεδιάσετε την όψη του.



Σχήμα 20

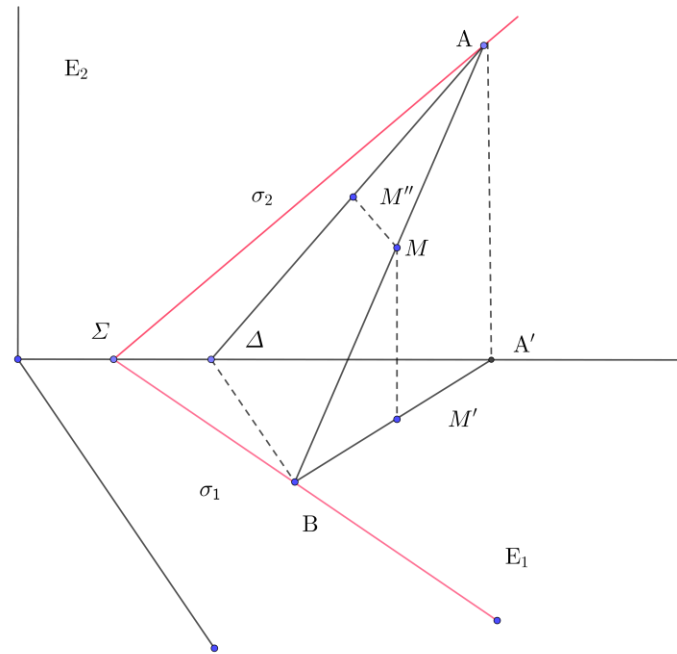
Άσκηση 6

Στο χαρτί σχεδίασης δίνονται το δεύτερο ίχνος σ_2 ενός επιπέδου Π , ή πρώτη προβολή M' και η δεύτερη προβολή M'' ενός σημείου M που βρίσκεται πάνω στο Π . Ζητείται το δεύτερο ίχνος του επιπέδου Π .



Σχήμα 21

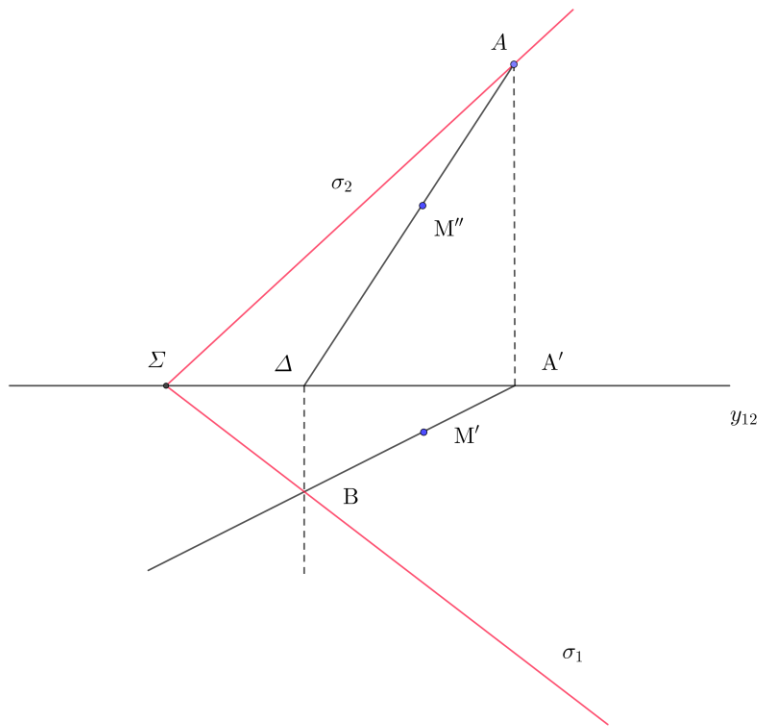
Λύση



Σχήμα 22

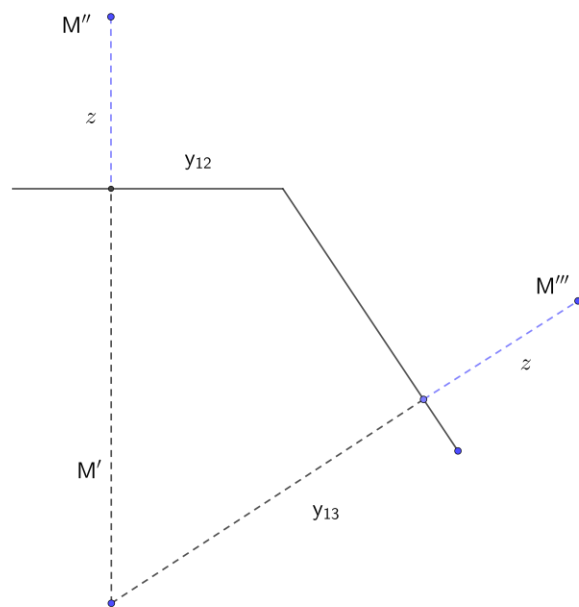
Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A πάνω στην σ_2 . Η ευθεία που διέρχεται από τα A, M βρίσκεται πάνω στο Π . Αυτή η ευθεία τέμνει το E_1 στο B . Άρα η σ_1 διέρχεται από το B . Παρατηρούμε ότι η πρώτη προβολή της AB είναι η $A'B$, η δε δεύτερη προβολή της είναι η AD .

Για να εντοπίσουμε το σημείο B στο χαρτί σχεδίασης, σχεδιάζουμε την AM'' η οποία τέμνει τον y_{12} στο Δ . Απο το Δ φέρνουμε την κάθετη στον y_{12} . Ακολούθως, φέρνουμε την ευθεία $A'M'$ η οποία τέμνει την κάθετο απο το Δ στο σημείο B. Η σ_1 διέρχεται από το Σ και το B.



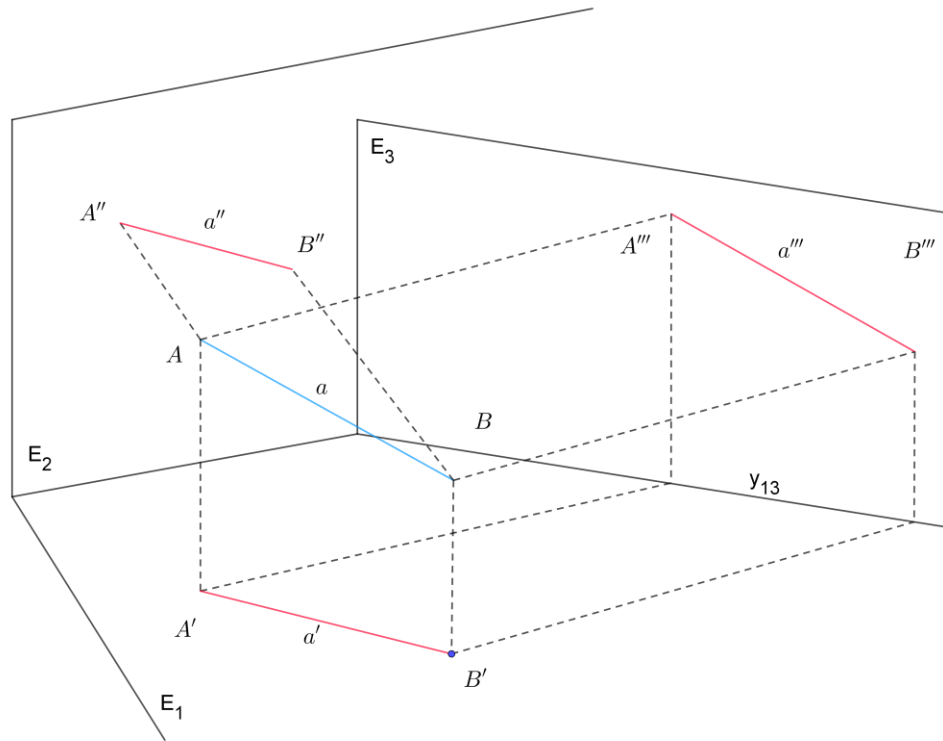
Σχήμα 23

Στο χαρτί σχεδίασης έχουμε



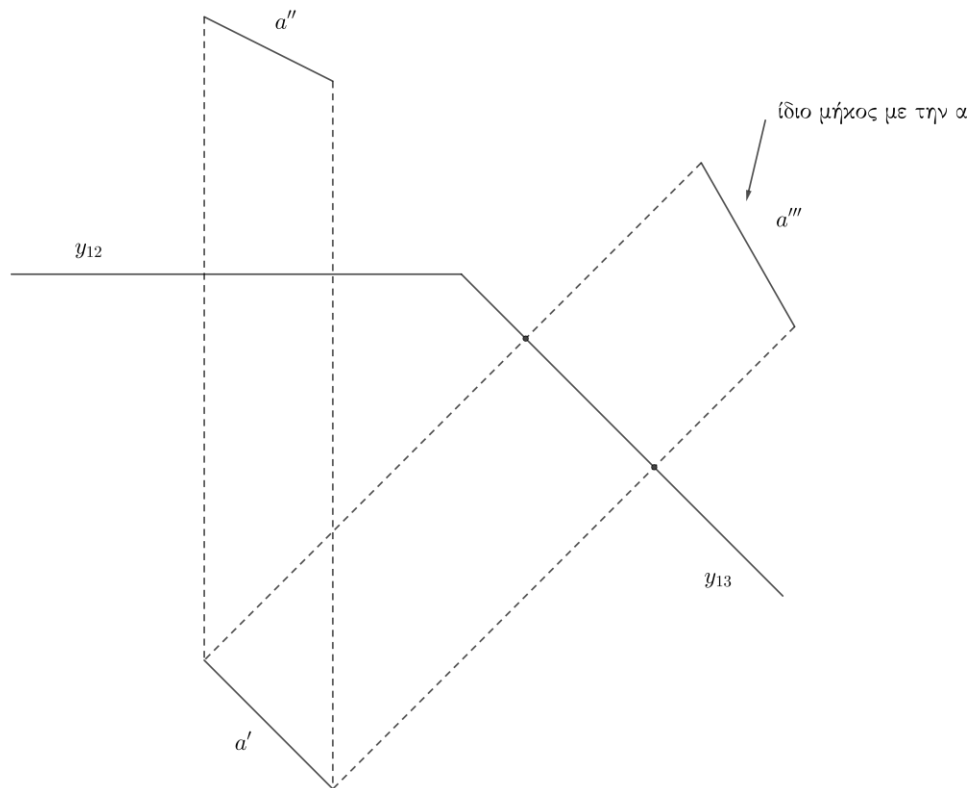
Σχήμα 25

Υποθέτουμε ότι μια ευθεία a είναι παράλληλη στο επίπεδο E_3 .



Σχήμα 26

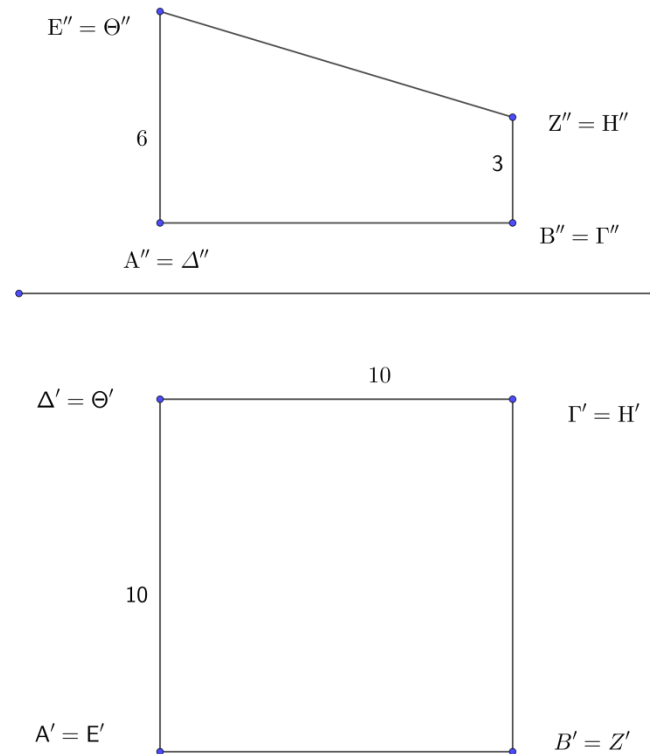
Τότε η τρίτη προβολή a''' της a έχει το πραγματικό μέγεθος της a (δηλαδή η a και a''' έχουν το ίδιο μήκος).



Σχήμα 27

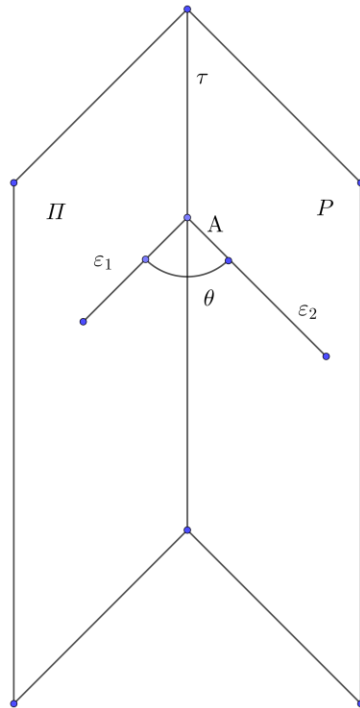
Άσκηση 7

Να σχεδιάσετε το παρακάτω κτίριο στο σύστημα των δύο επιπέδων του Monge. Με κατάλληλη αλλαγή στα επίπεδα E_1, E_3 να απεικονίσετε την ΕΗ στο πραγματικό της μέγεθος.



Σχήμα 28

Γωνία μεταξύ δύο επιπέδων



Σχήμα 29

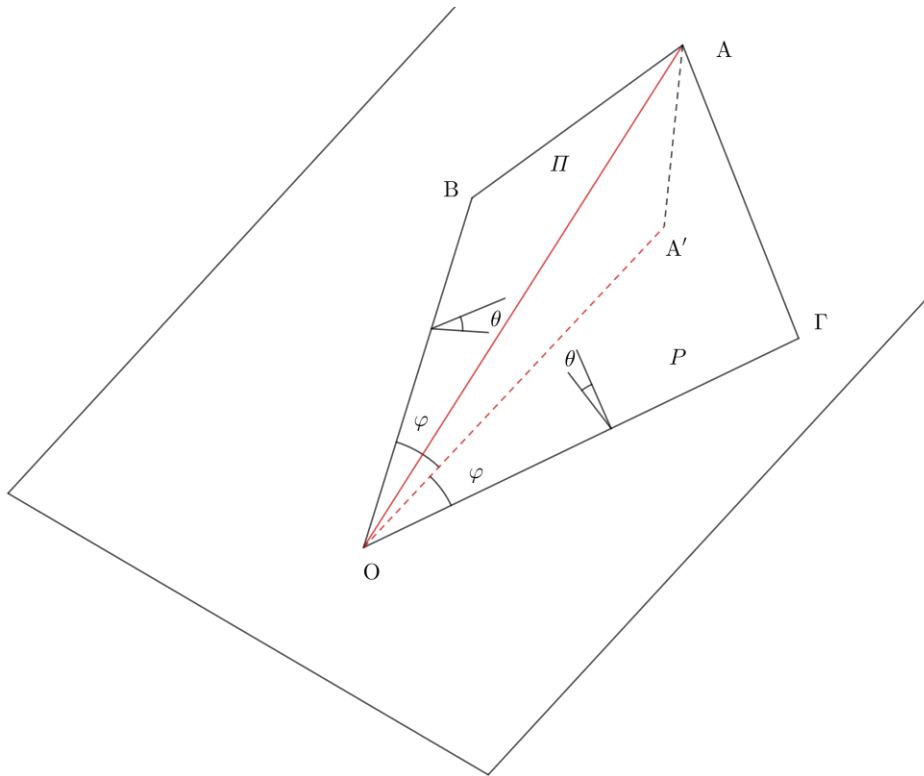
Θεωρούμε δύο επίπεδα Π, P με τομή την ευθεία τ και A ένα σημείο της τ . Φέρουμε τις ευθείες $\varepsilon_1 \in \Pi, \varepsilon_2 \in P$ οι οποίες διέρχονται από το A και είναι κάθετες στην τ . Η γωνία μεταξύ των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ λέγεται γωνία των επιπέδων Π, P . (προσοχή διότι έχουμε 4 τέτοιες γωνίες)

Ισοκλινή επίπεδα

Έχουμε δύο επίπεδα Π, P τα οποία σχηματίζουν την ίδια γωνία θ με ένα επίπεδο E . Τα Π, P θα ονομάζονται ισοκλινή σε σχέση με το E .

Η τομή των Π, P είναι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία O, A .

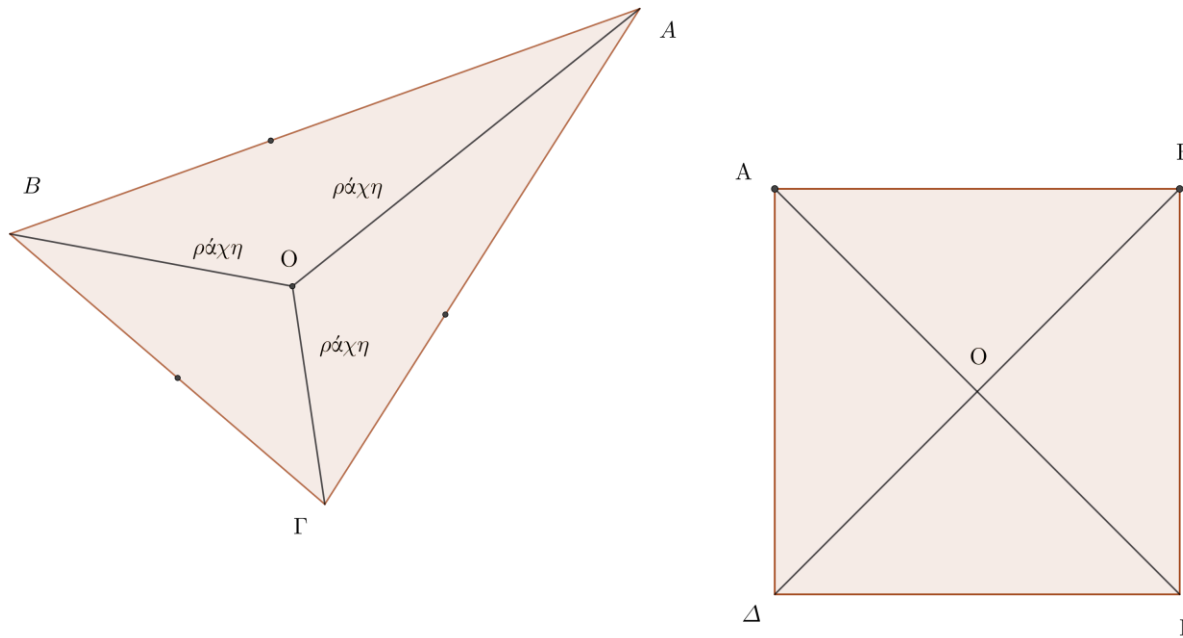
Όταν τα Π, P είναι ισοκλινή σε σχέση με το E , η προβολή OA' του ευθύγραμμου τμήματος OA , στο παρακάτω σχήμα, είναι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BO\Gamma}$.



Σχήμα 30

Στέγες με ισοκλινή επίπεδα

Παραδείγματα



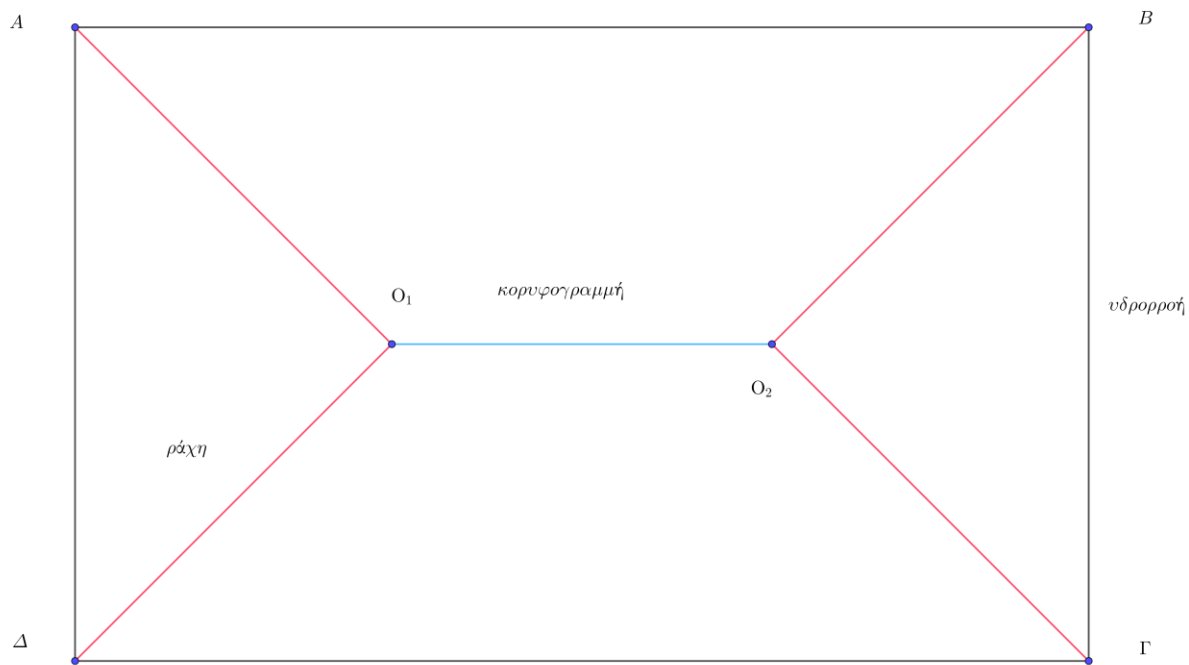
Σχήμα 31

Ένα κτίριο έχει πρώτη προβολή το τρίγωνο $AB\Gamma$ (σχήμα 31). Θέλουμε να κατασκευάσουμε μια στέγη με τρεις ράχες και ισοκλινή επίπεδα. Η πρώτη προβολή κάθε ράχης διχοτομεί την αντίστοιχη γωνία, οπότε το σημείο τομής των ραχών είναι το σημείο τομής των διχοτόμων του τριγώνου.

Ομοίως, το σημείο τομής των πρώτων προβολών των ραχών της σκεπής ενός κτιρίου με πρώτη προβολή ένα τετράγωνο (σχήμα 31) είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου (οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες).

Στο παρακάτω σχήμα αντιμετωπίζεται η περίπτωση ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου.

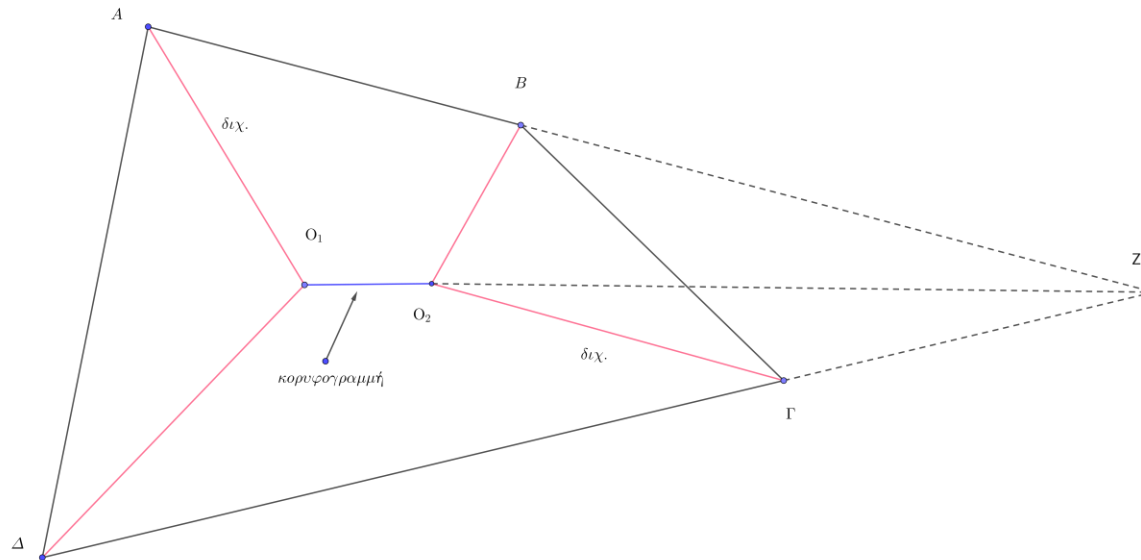
Τα σημεία O_1, O_2 είναι τα σημεία τομής των διχοτόμων τα οποία συνδέονται με μια ευθεία που ονομάζεται κορυφογραμμή.



Σχήμα 32

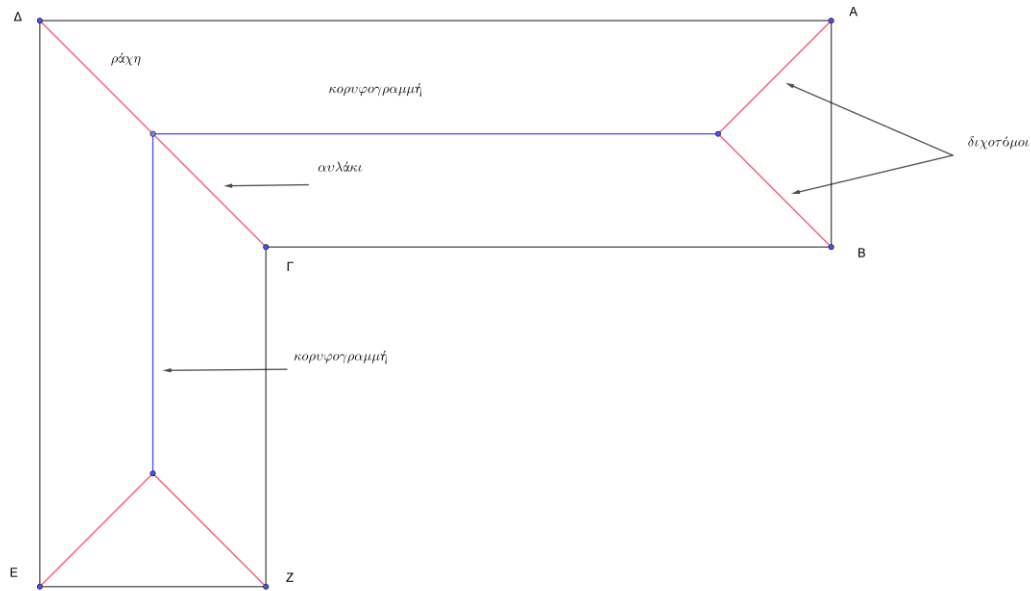
Στο σχήμα 33 έχουμε ένα τετράπλευρο, εργαζόμαστε όπως στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Παρατήρηση: Οι τρεις διακεκομμένες ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο, το Z .



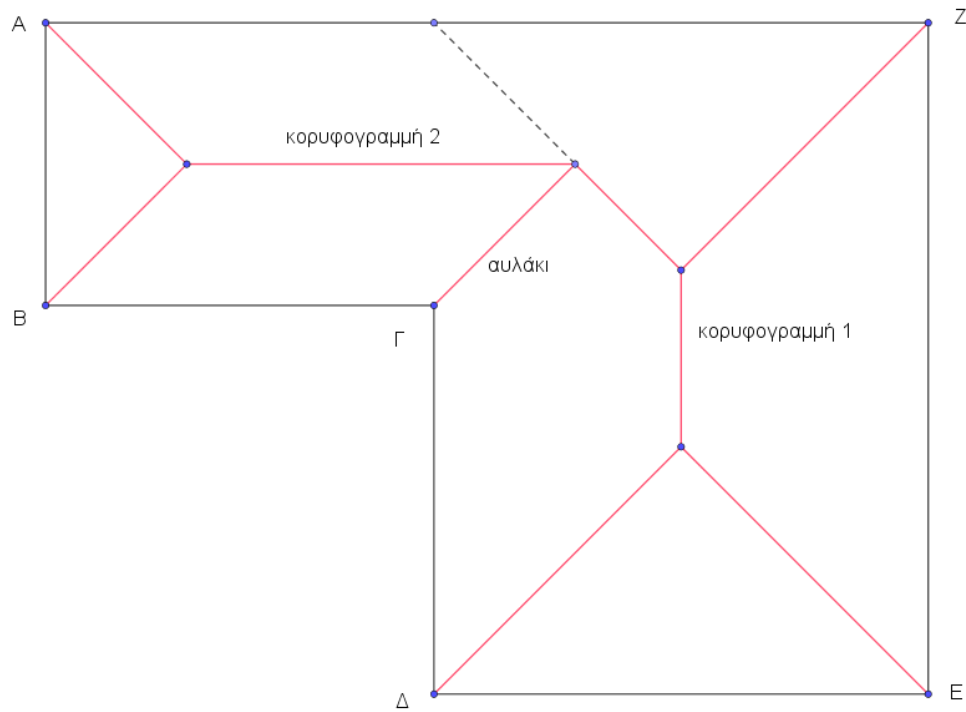
Σχήμα 33

Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες A, B, Δ, E, Z είναι ορθές και τα μήκη των πλευρών AB και EZ είναι ίσα.



Σχήμα 34

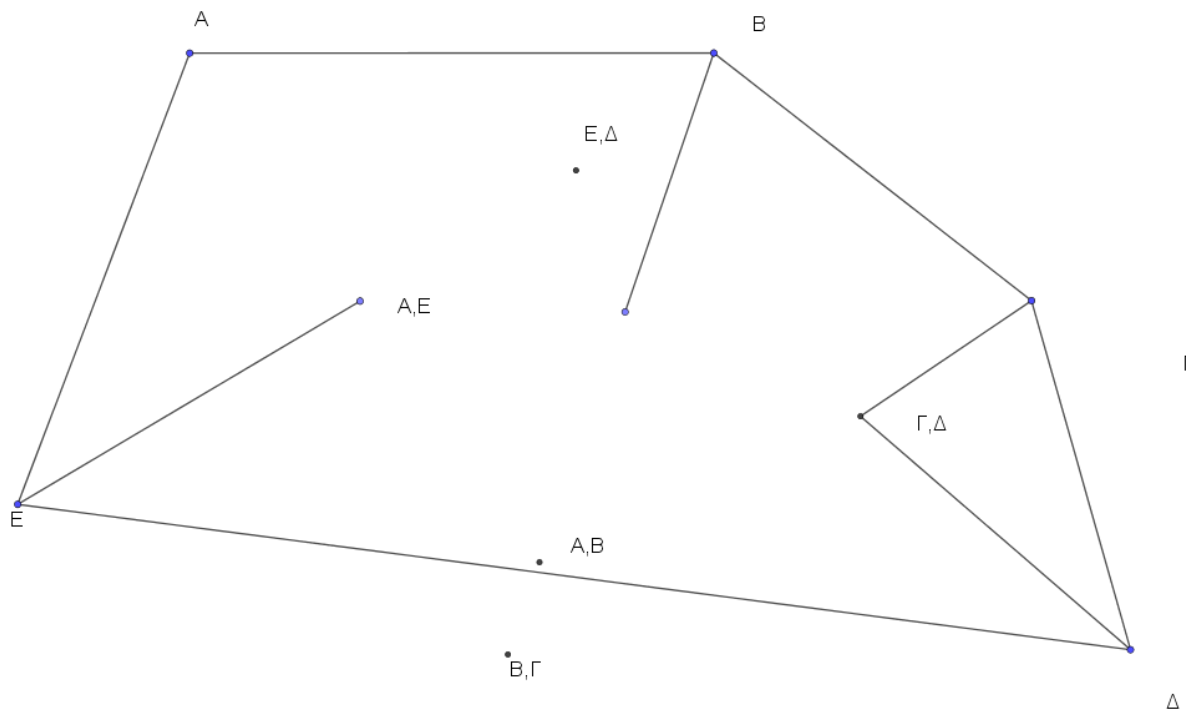
Όταν τα μήκη των πλευρών AB και ZE δεν είναι ίσα, τότε εργαζόμαστε όπως στο παρακάτω σχήμα. Παρατηρήστε ότι η κορυφογραμμή 1 βρίσκεται πιο ψηλά από την κορυφογραμμή 2.



Σχήμα 35

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση ενός μη κανονικού πενταγώνου. Θα δούμε πως το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση ενός τετραπλεύρου, το οποίο αντιμετωπίσαμε στο σχήμα 33.

Σχεδιάζουμε τις διχοτόμους των γωνιών A , B , Γ , Δ , E . Τα σημεία τομής τους συμβολίζονται με δύο γράμματα που χωρίζονται με ένα κόμμα. Για παράδειγμα, με E,Δ συμβολίζουμε το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών E και Δ .

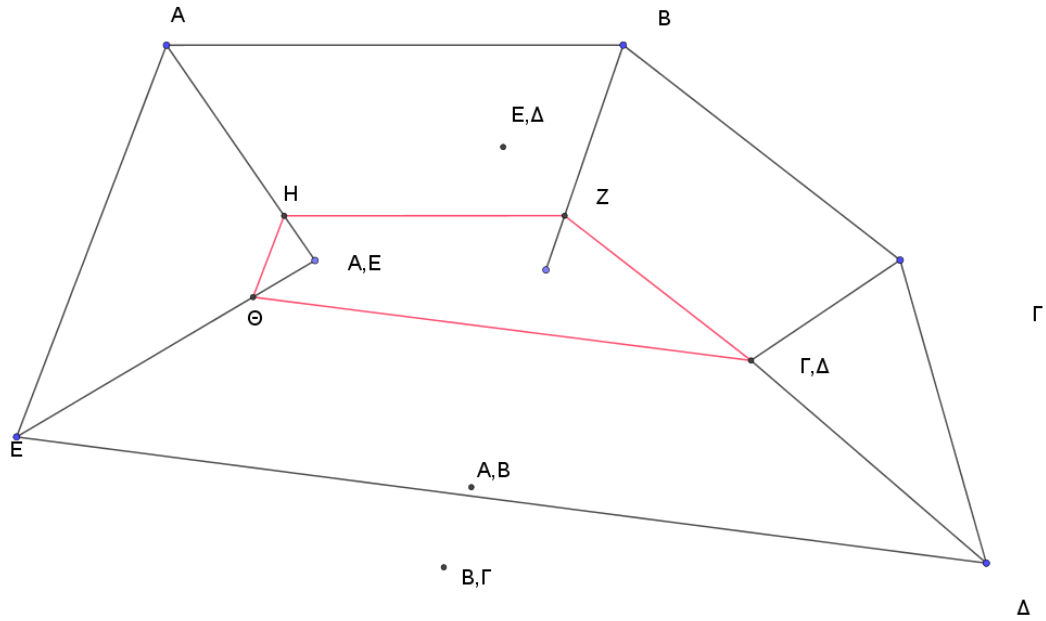


Σχήμα 36

Εξετάζουμε ποιά απο τις παρακάτω αποστάσεις είναι η πιο μικρή:

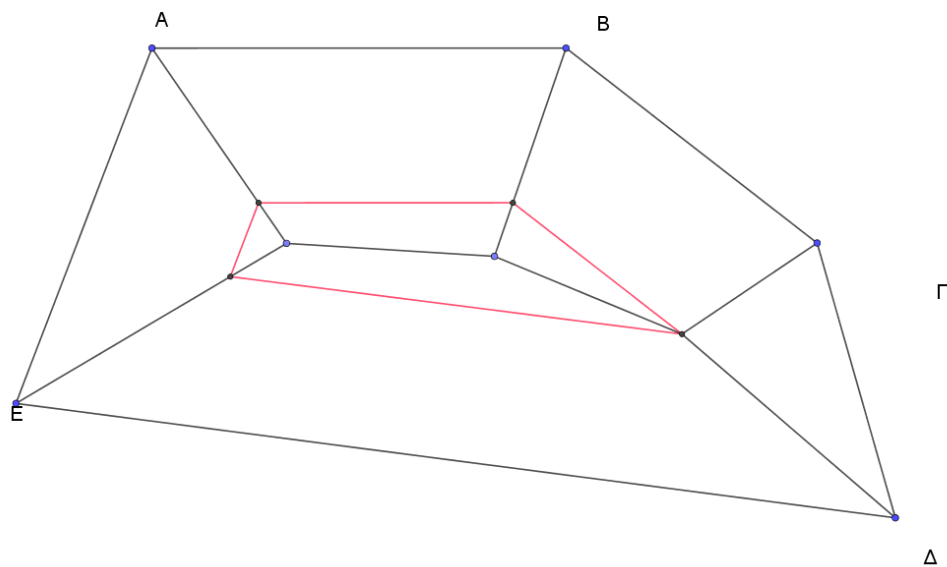
του σημείου A, B από το ευθύγραμμο τμήμα AB ,
του σημείου B, Γ από το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$,
του σημείου Γ, Δ από το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$,
του σημείου Δ, E από το ευθύγραμμο τμήμα ΔE ,
του σημείου E, Z από το ευθύγραμμο τμήμα EZ .

Στην περίπτωση μας, μικρότερη είναι η απόσταση του σημείου Γ, Δ από το $\Gamma\Delta$. Από το Γ, Δ σχεδιάζουμε παράλληλο προς την ΓB η οποία τέμνει την διχοτόμο της B στο Z . Από το Z φέρουμε παράλληλο προς την AB η οποία τέμνει την διχοτόμο της A στο H . Από το H φέρουμε παράλληλο προς την AE η οποία τέμνει την διχοτόμο της E στο Θ . Παρατηρήστε ότι η ευθεία που ενώνει το Θ με το Γ, Δ είναι παράλληλη στο $E\Delta$.



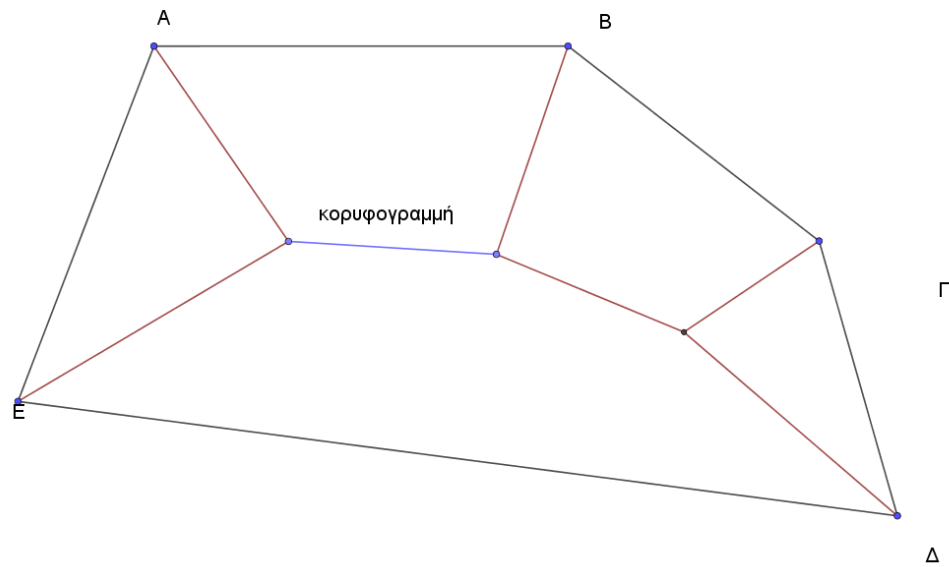
Σχήμα 37

Εργαζόμαστε τώρα όπως στο σχήμα 33 διότι έχουμε ένα τετράπλευρο (με τις κόκκινες πλευρές)



Σχήμα 38

και καταλήγουμε στην πρώτη προβολή της σκεπής:



Σχήμα 39

Άσκηση

Να βρείτε την δεύτερη προβολή για τις στέγες που εμφανίζονται στα σχήματα 31-35. Θεωρήστε γνωστή τη γωνία κλίσης των εδρών της στέγης και ένα σημείο της κορυφογραμμής.

Βιβλιογραφία

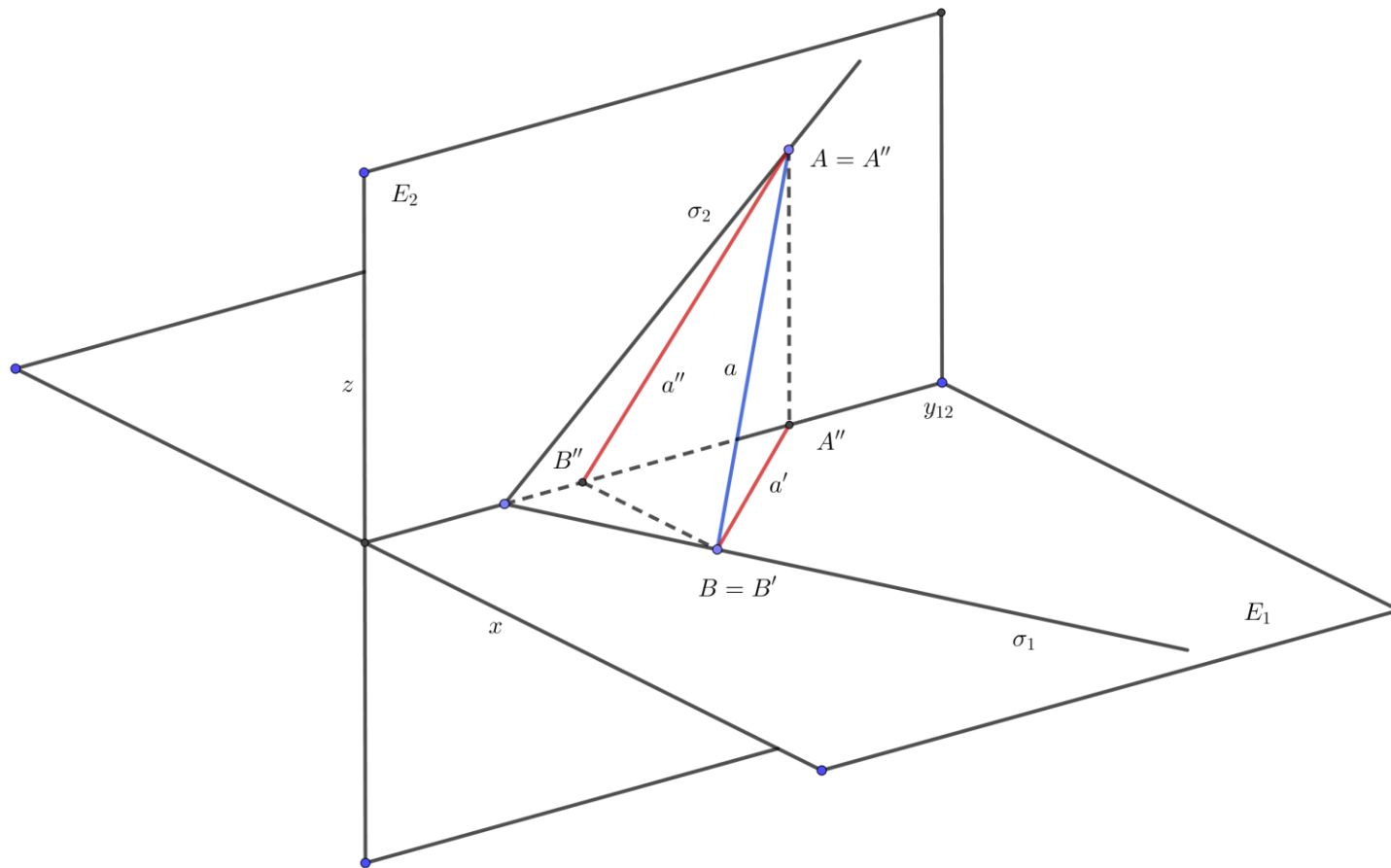
Κουρνιατής Ν., Τεχνικές αναπαράστασης με γεωμετρικές μεθόδους και σύγχρονα ψηφιακά μέσα, Εκδόσεις Τζιόλα.

Λευκαδίτης Γ.Ε., Εξαρχάκος Γ.Μ., Μέθοδοι παραστάσεων, Εκδόσεις Ενέλιξη.

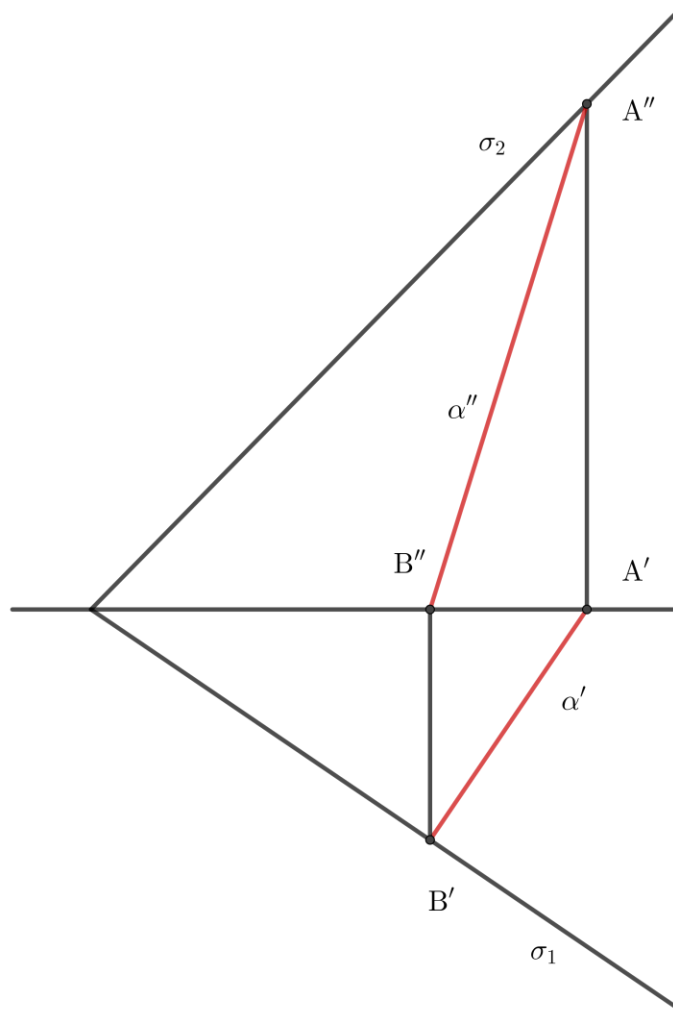
Συμπλήρωμα

Ιχνοκάθετοι

Ένα επίπεδο σ καθορίζεται από τα ίχνη του σ_1, σ_2 στο σύστημα των δύο επιπέδων του Monge. Από σημείο A της σ_2 φέρνουμε κάθετο στην σ_1 η οποία την τέμνει στο B . Θέλουμε να προσδιορίσουμε το B στο χαρτί σχεδίασης.



Στο χαρτί σχεδίασης



Από το A'' φέρουμε κάθετο στον άξονα y_{12} , τον τέμνει στο A' . Από το A' φέρνουμε κάθετη στην σ_1 , καθορίζοντας το B' . Από το B' φέρνουμε κάθετο στον άξονα και παίρνουμε το B'' .