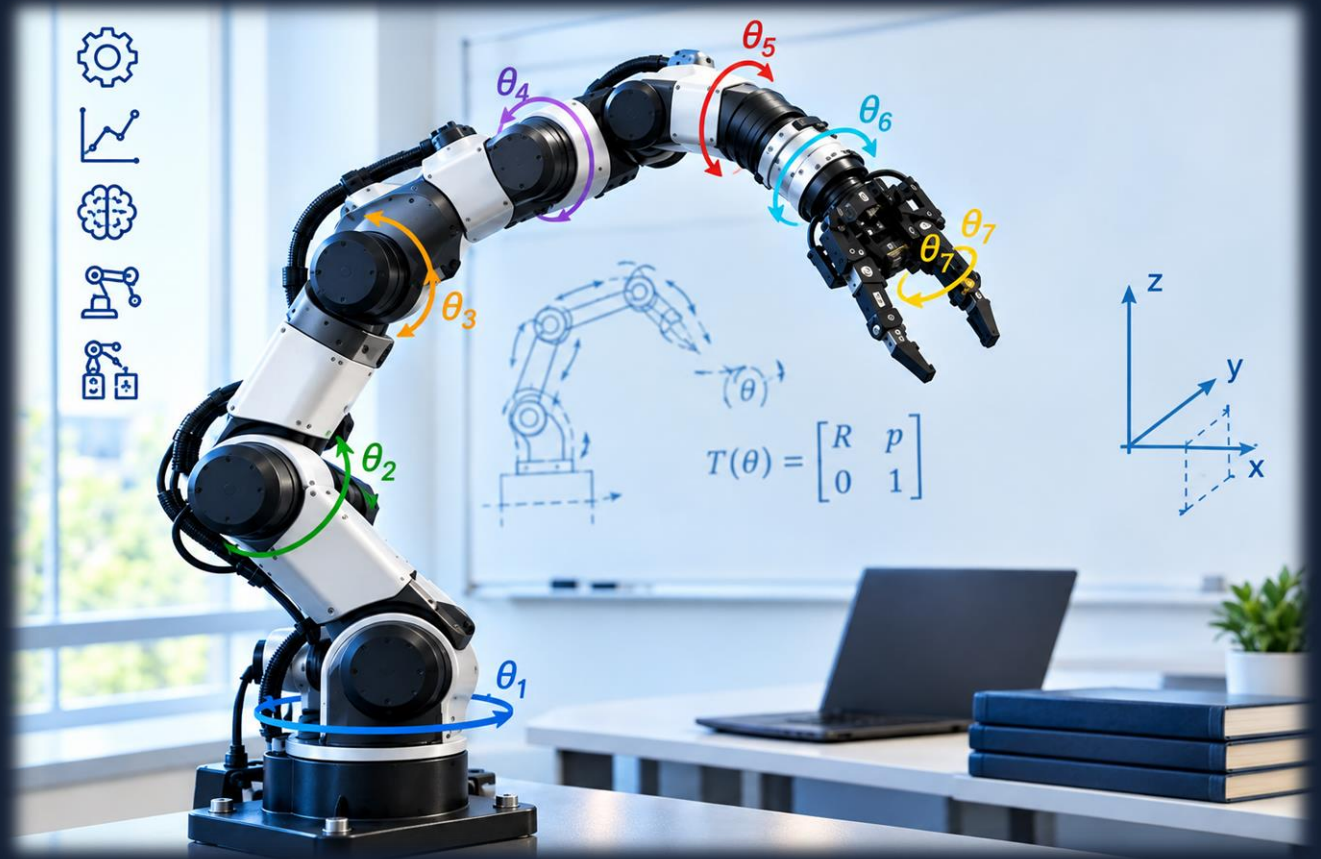


Ρομποτική

Διάλεξη 04

Χώρος Στάσεων



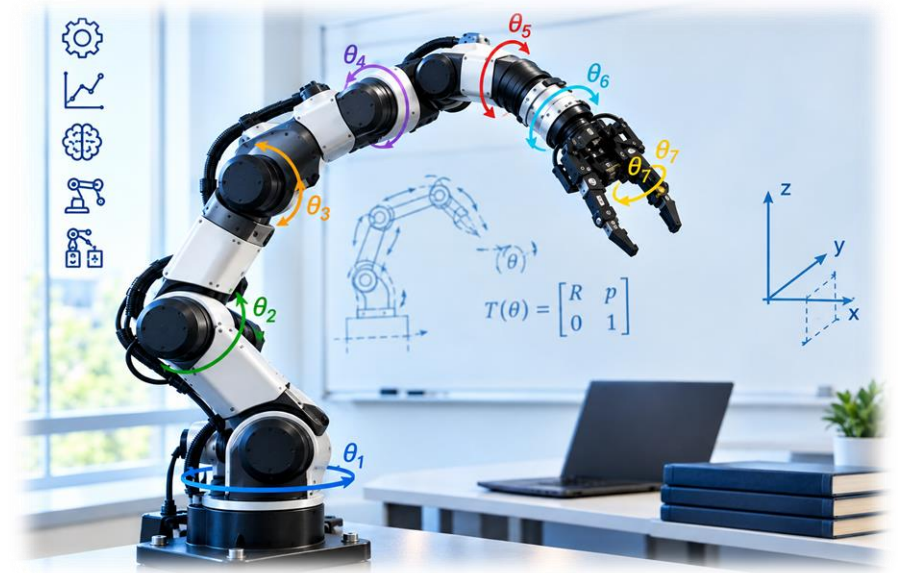
Καθ. Μιχαήλ Γ. Λαγουδάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης



Χώρος Στάσεων

Τοπολογία και Αναπαράσταση



Χώροι Στάσεων

- **Ρομποτικός χώρος στάσεων (C-χώρος) (Configuration space, C-space)**
 - ο n -διάστατος χώρος που περιλαμβάνει όλες τις δυνατές στάσεις του ρομπότ
- **Σχήμα**
 - ποια είναι η διαφορά μεταξύ επιπέδου και μπάλας; (2 διαστάσεων και τα δύο)
 - το επίπεδο εκτείνεται στο άπειρο, ενώ η μπάλα αναδιπλώνεται στον εαυτό της!
 - δεν είναι μόνο η διάσταση σημαντική, αλλά και το σχήμα του χώρου
 - χρησιμοποιούμε την έννοια της τοπολογίας των επιφανειών
- **Τοπολογία (topology)**
 - χώροι τοπολογικά ισοδύναμοι: εάν ο ένας μπορεί να παραμορφωθεί με συνεχή τρόπο στον άλλο χωρίς κοπές ή συγκολλήσεις
 - π.χ. μια μπάλα ποδοσφαίρου είναι τοπολογικά ισοδύναμη με μπάλα τένις, ράγκμπυ
 - ... αλλά δεν είναι τοπολογικά ισοδύναμη με κάποιο επίπεδο!

Παράδειγμα Τοπολογικής Ισοδυναμίας

1. ανοικτό διάστημα
2. ανοικτό ημικύκλιο
3. ευθεία γραμμή



Ερώτηση: Αν το διάστημα ή το ημικύκλιο ήταν κλειστό, θα είχαμε ισοδυναμία;

Συμβολισμοί

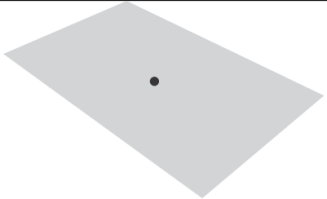
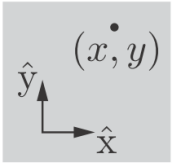
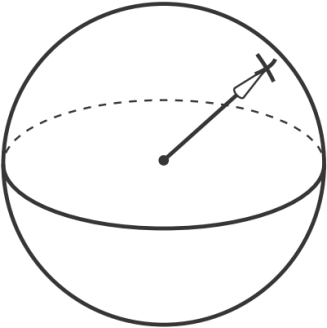
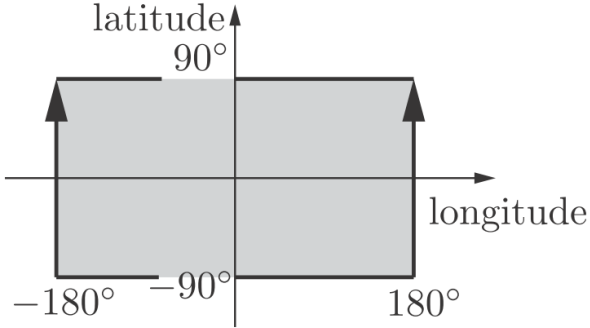
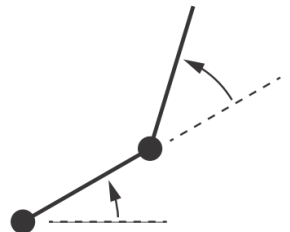
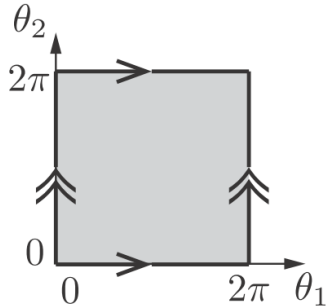
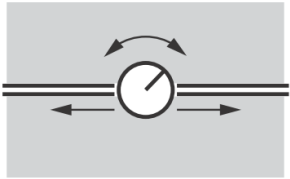
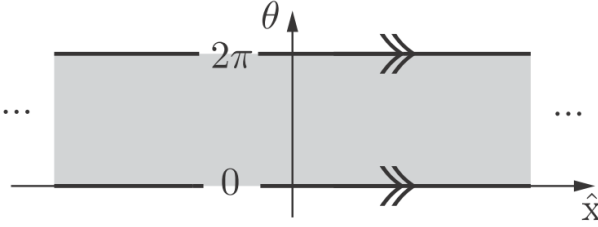
- **Κύκλος**
 - S ή S^1 : μονοδιάστατη σφαίρα!
- **Ευθεία**
 - E ή E^1 : μονοδιάστατος Ευκλείδειος χώρος, R ή R^1 : εναλλακτικά, ως ένας πραγματικός
- **Διάστημα Ευθείας**
 - $[a,b] \subset R^1$: κλειστό διάστημα, $(a,b) \subset R^1$: ανοικτό διάστημα
- **n -διάστατος Ευκλείδειος Χώρος**
 - $R^1 \times R^1 \times \dots \times R^1 = R^n$: n πραγματικοί αριθμοί
- **n -διάστατη Επιφάνεια Σφαίρας**
 - S^n : n πραγματικοί αριθμοί για σφαίρα μέσα στον $(n+1)$ -διάστατο (φυσικό) χώρο
 - προσοχή! $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 \neq S^n$, αλλά $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$ (τόρος – torus)

Ιδιότητες Τοπολογικής Ισοδυναμίας

- **Ανεξάρτητη από την αναπαράσταση**
 - θεμελιώδης ιδιότητα του ίδιου του χώρου
 - ανεξάρτητη από το πώς επιλέγουμε συντεταγμένες
 - ανεξάρτητη από την αναπαράσταση!
- **Παράδειγμα**
 - κύκλος
 - αναπαράσταση με πολικές συντεταγμένες
 - αναπαράσταση με καρτεσιανές συντεταγμένες (και περιορισμό)
 - όμως, μία μόνο τοπολογία κύκλου!

Διαφορετικές Τοπολογίες

- διδιάστατες τοπολογίες
- μη ισοδύναμες μεταξύ τους
- ενδεικτικές αναπαραστάσεις
- προσοχή στις αναδιπλώσεις!

system	topology	sample representation
 point on a plane	 $\mathbb{E}^2$	 $\mathbb{R}^2$
 spherical pendulum	 S^2	 $[-180^\circ, 180^\circ] \times [-90^\circ, 90^\circ]$
 2R robot arm	 $T^2 = S^1 \times S^1$	 $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$
 rotating sliding knob	 $\mathbb{E}^1 \times S^1$	 $\mathbb{R}^1 \times [0, 2\pi)$

Χώροι Στάσεων ως Καρτεσιανό Γινόμενο

- Στερεό σώμα στο επίπεδο

$$\mathbb{R}^2 \times S^1$$

- Ρομποτικός βραχίονας PR

$$\mathbb{R}^1 \times S^1$$

- Ρομποτικός βραχίονας 2R

$$S^1 \times S^1 = T^2$$

- Επίπεδο στερεό σώμα με ενσωματωμένο ρομποτικό βραχίονα 2R

$$\mathbb{R}^2 \times S^1 \times T^2 = \mathbb{R}^2 \times T^3$$

- Στερεό σώμα στον τριδιάστατο (φυσικό) χώρο

$$\mathbb{R}^3 \times S^2 \times S^1$$

Αναπαράσταση Χώρου Στάσεων

- **Αναπαράσταση (representation) χώρου**

- ένα σύνολο πραγματικών αριθμών, π.χ. ένα διάνυσμα
- περιλαμβάνει επιλογές που κάνουμε εμείς
- δεν είναι τόσο θεμελιώδης έννοια, όσο η τοπολογία του χώρου
- παράδειγμα: αναπαράσταση σημείου στον φυσικό τριδιάστατο χώρο
 - επιλογή συστήματος αναφοράς (αρχής αξόνων και κατεύθυνσης αξόνων)
 - επιλογή κλίμακας μήκους

- **Σαφής παραμετροποίηση χώρου**

- επιλογή n συντεταγμένων ή παραμέτρων για αναπαράσταση n -διάστατου χώρου
- παράδειγμα: γεωγραφικό μήκος $[-180^\circ, +180^\circ)$ και γεωγραφικό πλάτος $[-90^\circ, +90^\circ]$

Ιδιομορφίες Αναπαράστασης

- **Ιδιομορφίες (Singularities)**

- εμφανίζονται όταν μικρές μεταβολές στον αναπαριστούμενο χώρο ...
- ... οδηγούν σε πολύ μεγάλες μεταβολές στην επιλεγμένη αναπαράσταση
- προβληματικές, όταν αναπαριστούμε ταχύτητες ως μεταβολές στην αναπαράσταση

- **Παράδειγμα**

- κίνηση γύρω από το Βόρειο ή Νότιο πόλο της γης ...
- ... στην αναπαράσταση με γεωγραφικό μήκος και γεωγραφικό πλάτος
- τεράστιες αλλαγές στην αναπαράσταση, αλλά και στην ταχύτητα ...
- ... ακόμη και για κίνηση σταθερής ταχύτητας πάνω στην επιφάνεια της γης!

Αντιμετώπιση Ιδιομορφιών Αναπαράστασης

- **Άτλαντας (Atlas)**

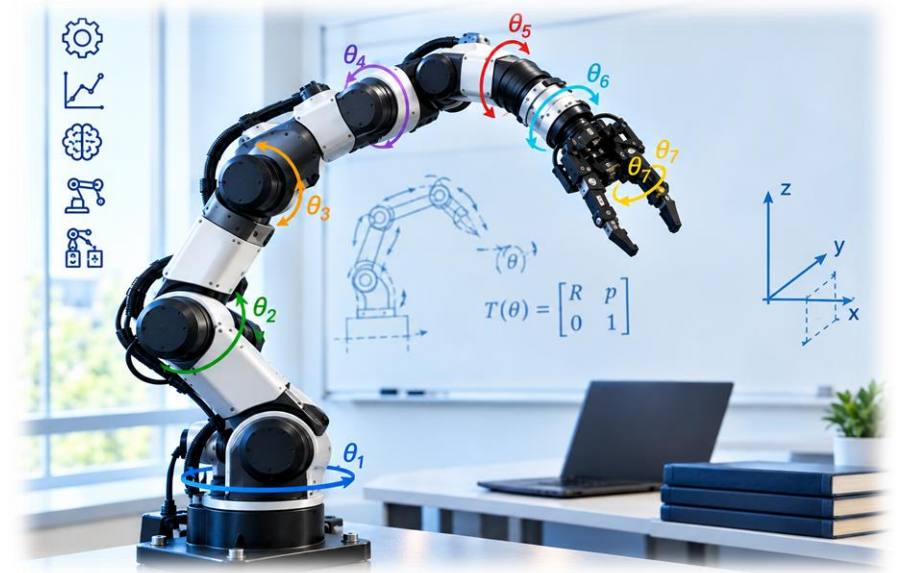
- πολλαπλοί χάρτες συντεταγμένων (coordinate charts) που επικαλύπτονται μεταξύ τους
- άτλαντας: σύνολο χαρτών συντεταγμένων που καλύπτουν ολόκληρο τον χώρο
- μειονέκτημα: απαιτούνται επιπλέον διαδικασίες για την εναλλαγή μεταξύ χαρτών
- οι Ευκλείδειοι χώροι μπορούν να καλυφθούν από έναν μόνο χάρτη χωρίς ιδιομορφίες!

- **Υπονοούμενη (implicit) αναπαράσταση**

- ένθεση του χώρου ενδιαφέροντος μέσα σε Ευκλείδειο χώρο με πιο πολλές διαστάσεις
- προσθήκη περιορισμών στον χώρο υψηλότερης διάστασης
- παράδειγμα: μοναδιαία σφαίρα (2D) μέσα στον φυσικό χώρο (3D) με $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- μειονέκτημα: περισσότεροι αριθμοί στην αναπαράσταση από το πλήθος των β.ε.
- σε κλειστές αλυσίδες: όλες οι τιμές αρθρώσεων μαζί με εξισώσεις κλειστότητας βρόχου
- προσανατολισμός στον φυσικό χώρο: πίνακας περιστροφής (9D) αντί γωνίες Euler (3D)

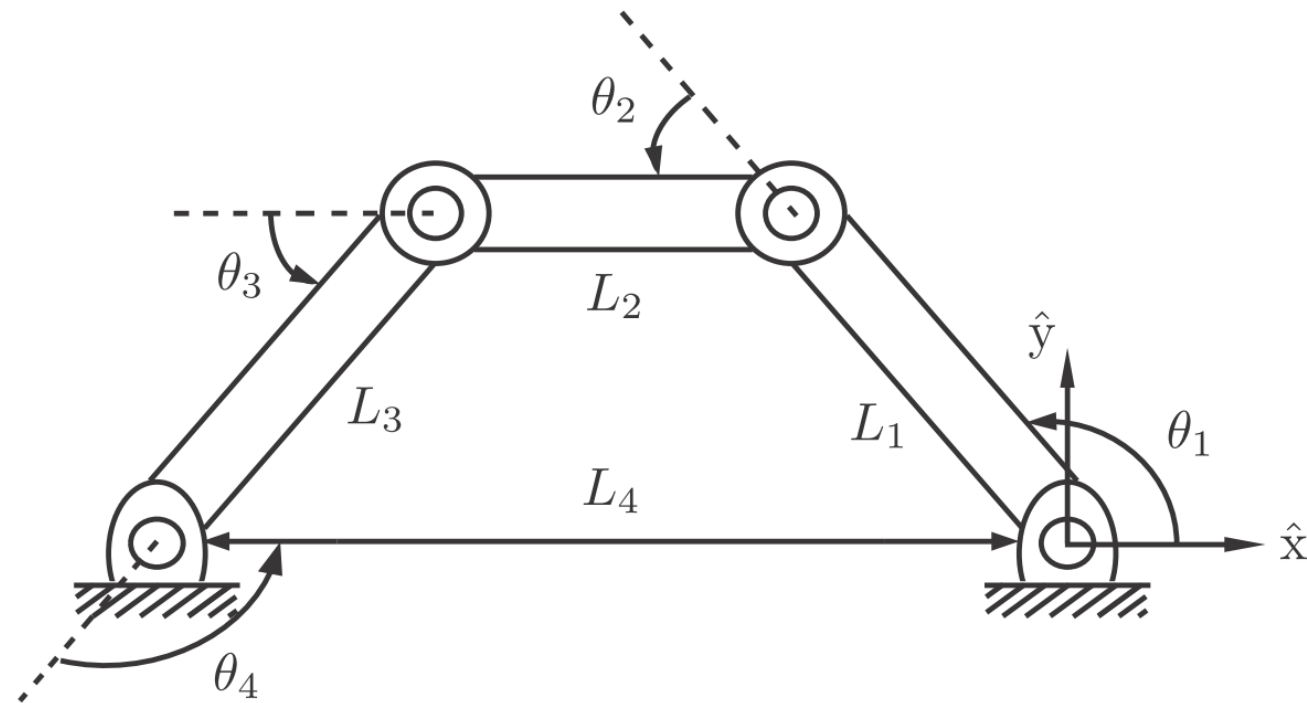
Περιορισμοί

Στάσης και Ταχύτητας



Κλειστή Αλυσίδα 4 Ράβδων

- έχει μόνο 1 βαθμό ελευθερίας
- όμως 4 περιστροφικές αρθρώσεις
- 4D υπονοούμενη αναπαράσταση
 - 4 γωνίες περιστροφικών αρθρώσεων
 - με εξισώσεις κλειστότητας βρόχου
- θεώρηση ως σειριακή αλυσίδα
 - με αρχή αξόνων στην απόληξη του L4
 - με οριζόντιο προσανατολισμό του L4
- 3 εξισώσεις με 4 αγνώστους
 - 1 βαθμός ελευθερίας!



$$\begin{aligned} L_1 \cos \theta_1 + L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dots + L_4 \cos(\theta_1 + \dots + \theta_4) &= 0, \\ L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \dots + L_4 \sin(\theta_1 + \dots + \theta_4) &= 0, \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - 2\pi &= 0. \end{aligned}$$

Γενικό Ρομπότ με Κλειστούς Βρόχους

- **Υπονοούμενη αναπαράσταση χώρου στάσεων**

- n -διάστατο διάνυσμα (στήλη)

$$\theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$$

- $k \leq n$ ανεξάρτητες εξισώσεις κλειστότητας βρόχου

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} g_1(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ g_k(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{bmatrix} = 0$$

- **ολόνομοι (holonomic) περιορισμοί:** μειώνουν τη διάσταση του χώρου
- χώρος στάσεων διάστασης $(n-k)$ εντεθειμένος στον R^n
- με την υπόθεση ότι έχουμε k ανεξάρτητους περιορισμούς

Κίνηση Γενικού Ρομπότ με Κλειστούς Βρόχους

– n -διάστατο διάνυσμα $\theta = [\theta_1 \ \cdots \ \theta_n]^T \in \mathbb{R}^n$

– $k \leq n$ ανεξάρτητες εξισώσεις κλειστότητας βρόχου $g(\theta) = 0 \quad g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$

– κίνηση ακολουθώντας τροχιά $\theta(t)$

$$g(\theta) = \begin{bmatrix} g_1(\theta_1, \dots, \theta_n) \\ \vdots \\ g_k(\theta_1, \dots, \theta_n) \end{bmatrix} = 0$$

$$\frac{d}{dt}g(\theta(t)) = 0 \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \\ \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta)\dot{\theta}_1 + \cdots + \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta)\dot{\theta}_n \end{bmatrix} = 0 \quad [\dot{\theta}_1 \ \cdots \ \dot{\theta}_n]^T$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\theta)\dot{\theta} = 0 \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_n}(\theta) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial \theta_1}(\theta) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial \theta_n}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} A(\theta)\dot{\theta} = 0 \\ A(\theta) \in \mathbb{R}^{k \times n} \end{matrix}$$

Περιορισμοί Pfaff

(ολόνομοι: ολοκληρώσιμοι περιορισμοί)

Ολίσθηση Όρθιου Κέρματος στο Επίπεδο

- στάση κέρματος (x, y, ϕ, ϑ)
- 4D χώρος στάσεων $\mathbb{R}^2 \times T^2$
- ολίσθηση $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = r\dot{\theta} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix}$

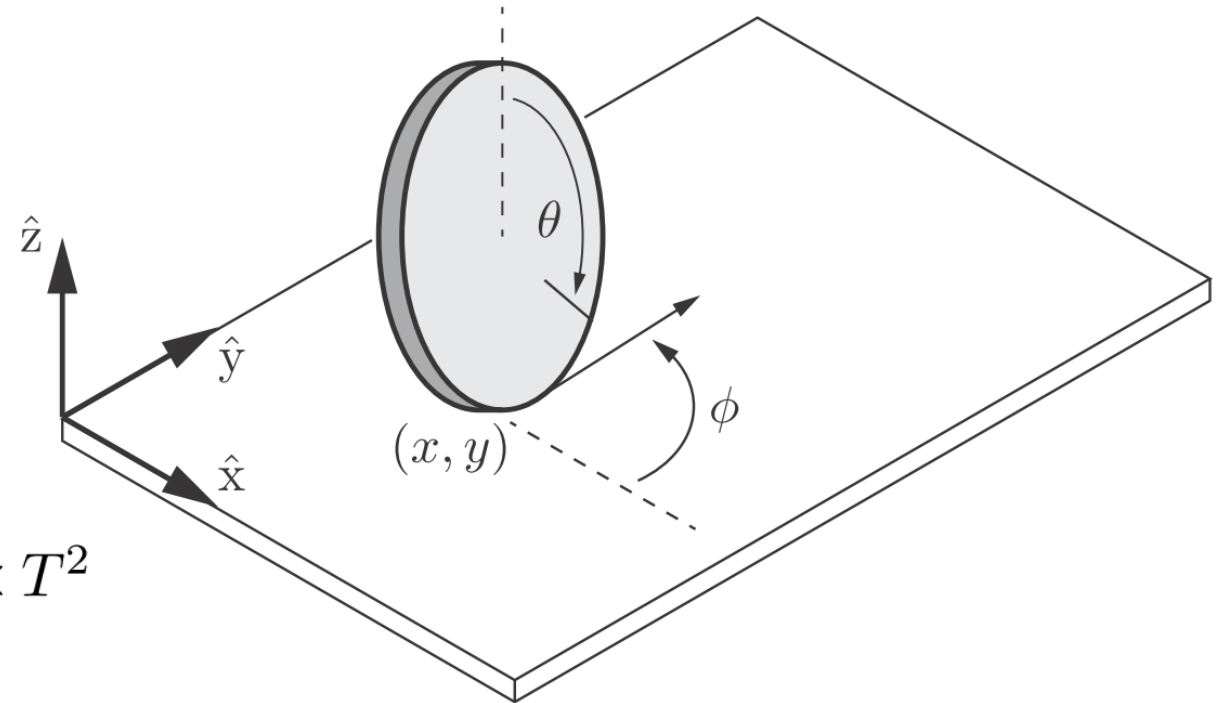
- αλλαγή μεταβλητών

$$q = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4]^T = [x \ y \ \phi \ \theta]^T \in \mathbb{R}^2 \times T^2$$

- Pfaffian constraints

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r \cos q_3 \\ 0 & 1 & 0 & -r \sin q_3 \end{bmatrix} \dot{q} = 0 \quad A(q)\dot{q} = 0, \quad A(q) \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

- δεν είναι ολοκληρώσιμοι αυτοί οι περιορισμοί!
- μειώνουν τη διάσταση εφικτών ταχυτήτων, αλλά όχι τη διάσταση εφικτών στάσεων
- **μη ολόνομοι (non-holonomic) περιορισμοί!**



Ευχαριστίες

- Ελευθέριος Δοϊτσίδης (Αν. Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Σάββας Πιπερίδης (ΕΔΙΠ Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Νικόλαος Τσουρβελούδης (Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Νικόλαος Βλάσσης (πρ. Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος (Ομ. Καθ. Σχολής ΜΜ, ΕΜΠ)
- Αντώνιος Τζες (πρ. Καθ. Τμήματος ΗΜΤΥ Πανεπιστημίου Πατρών)
- Γεώργιος Φουσκιτάκης (Αν. Καθ. Τμήματος ΗΜ, ΕΛΜΕΠΑ)