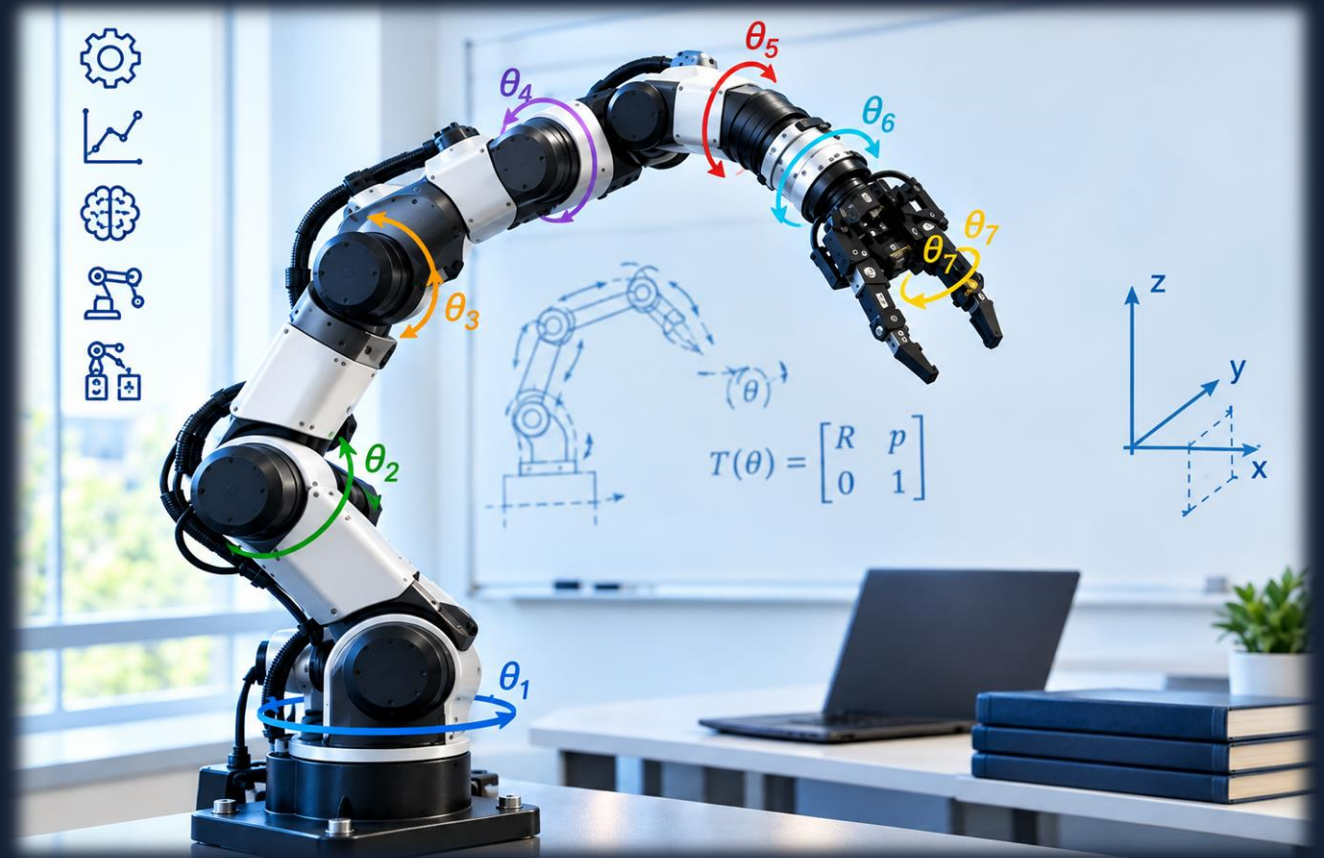


Ρομποτική

Διάλεξη 06

Συστήματα Αναφοράς
Κίνηση στο Επίπεδο



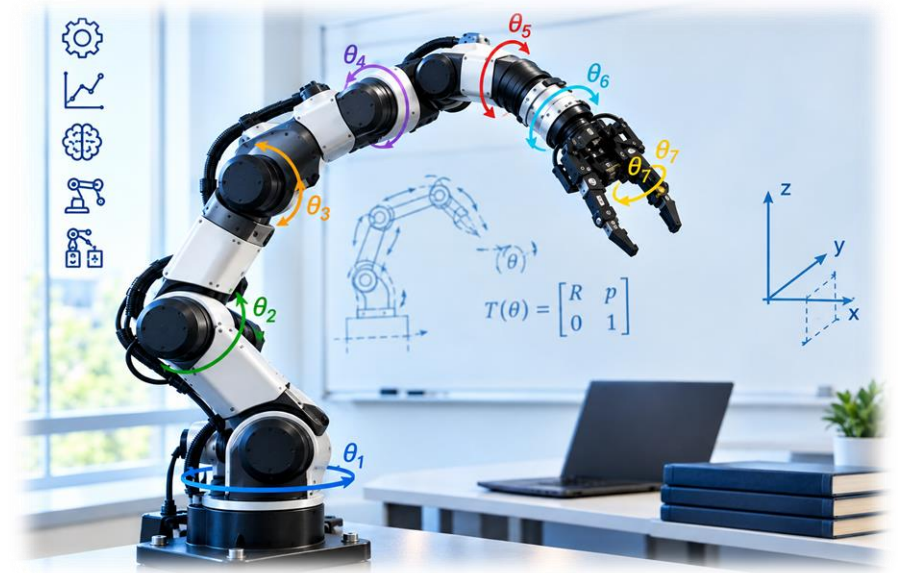
Καθ. Μιχαήλ Γ. Λαγουδάκης

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Πολυτεχνείο Κρήτης



Αναπαραστάσεις

Για στάσεις, ταχύτητες, δυνάμεις, ...



Αναπαράσταση Στάσης

- **Χαρακτηριστικά**

- στάση (θέση+προσανατολισμός) στον φυσικό 3-διάστατο χώρο $\Rightarrow$ 6 αριθμοί
- μη Ευκλείδεια (μη «επίπεδη») φύση του χώρου στάσεων
- ανάγκη για συστηματικό τρόπο περιγραφής και αναπαράστασης
- προσάρτηση ενός συστήματος αναφοράς στο στερεό σώμα
- υπονοούμενη αναπαράσταση με πίνακα $4 \times 4 \Rightarrow$ 16 αριθμοί
- ... με εφαρμογή 10 περιορισμών, ώστε να είναι έγκυρη η αναπαράσταση

- **Χρησιμότητα**

- για την αναπαράσταση διανυσμάτων ή ολόκληρων συστημάτων αναφοράς, αλλά ...
- ... και για την μετατόπιση ή την περιστροφή τους
- ... και για την μετατροπή (μετακίνηση) τους από ένα σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο
- μόνο με πράξεις γραμμικής άλγεβρας

Αναπαράσταση Ταχύτητας

- **Χαρακτηριστικά**

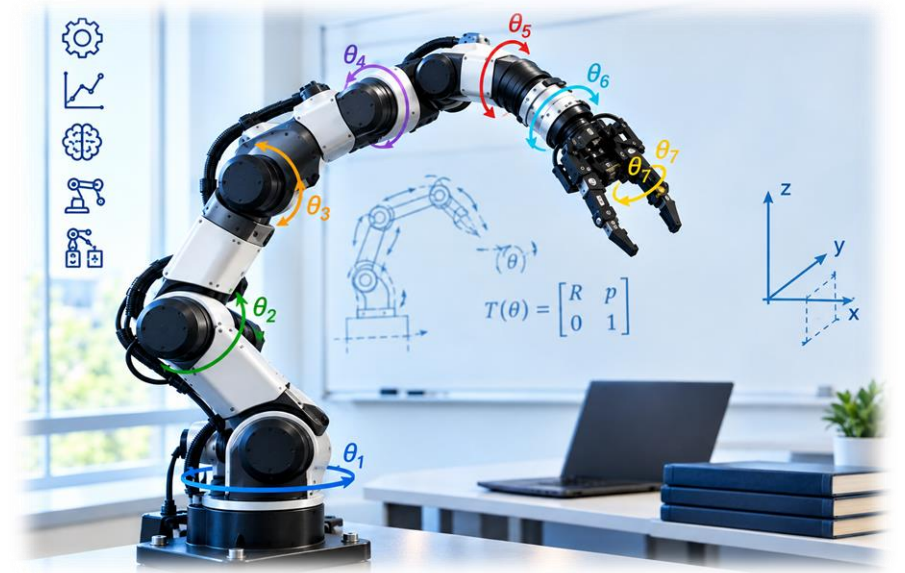
- 3 γραμμικές + 3 γωνιακές ταχύτητες στον φυσικό 3-διάστατο χώρο $\Rightarrow$ 6 αριθμοί
- Ευκλείδεια («επίπεδη») φύση του χώρου ταχυτήτων
- σημείο στον 6-διάστατο χώρο R^6 των πραγματικών $\Rightarrow$ χωρική ταχύτητα ή **συστροφή**
- διανυσματικός χώρος, δεν χρειάζεται υπονοούμενη αναπαράσταση
- π.χ. εφαπτόμενο επίπεδο στην τρέχουσα στάση για σφαιρικό εκκρεμές (στάσεις: S^2)

- **Εκθετικές συντεταγμένες (Exponential coordinates)**

- για μετάβαση σε κάποια στάση ξεκινώντας από ένα σταθερό σύστημα αναφοράς ...
- ... αρκεί να γίνει μια σταθερή συστροφή για ένα καθορισμένο χρονικό διάστημα!
- προσομοιάζει στην κίνηση ενός κοχλίου που περιστρέφεται και μεταφέρεται!
- όλες οι στάσεις μπορούν να επιτευχθούν μέσω μιας ελικοειδούς (κοχλιωτής) κίνησης
- 6D εκθετικές συντεταγμένες: περιγράφουν την κατεύθυνση κοχλίου + για πόσο χρόνο

Βασικές Έννοιες

Διανύσματα και συστήματα αναφοράς

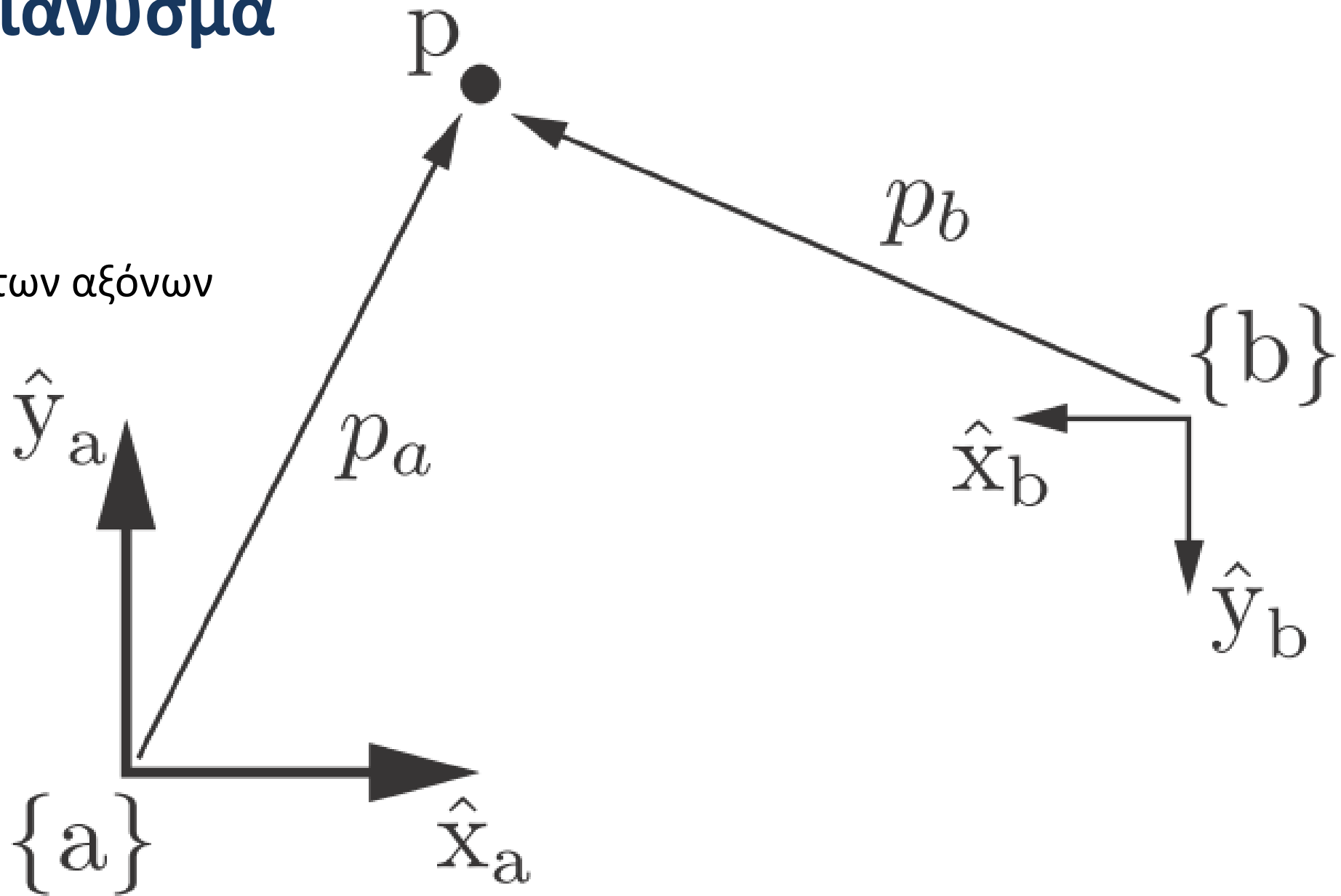


Διάνυσμα (Vector)

- **Ελεύθερο διάνυσμα (free vector) v**
 - γεωμετρική ποσότητα με μήκος και κατεύθυνση, ένας βέλος στον χώρο R^n
 - «ελεύθερο», διότι δεν είναι «καρφιτσωμένο» ή «στερεωμένο» κάπου
 - π.χ. μια γραμμική ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί ελεύθερο διάνυσμα
 - *μήκος*: το μέγεθος της ταχύτητας, *κατεύθυνση*: ο προσανατολισμός της ταχύτητας
- **Διάνυσμα σε σύστημα αναφοράς (Vector in reference frame)**
 - επιλογή συστήματος αναφοράς και κλίμακας μήκους για τον χώρο διανυσμάτων
 - οποιοδήποτε ελεύθερο διάνυσμα v μπορεί να τοποθετηθεί στην αρχή των αξόνων
 - ... χωρίς να αλλάξει το μήκος του, χωρίς να αλλάξει ο προσανατολισμός του
 - τότε αναπαρίσταται από τις συντεταγμένες του, $v \in R^n$ (το σημείο της «μύτης» του)
 - αν αλλάξει το σύστημα αναφοράς, θα αλλάξουν και οι συντεταγμένες v , αλλά όχι το v
 - v : φυσική ποσότητα, άνευ συντεταγμένων, v : αναπαράσταση του v βάσει επιλογής

Σημείο ως Διάνυσμα

- **Σημείο p**
 - ως διάνυσμα
 - από την αρχή των αξόνων
 - a : (+1, +2)
 - b : (+4, -2)

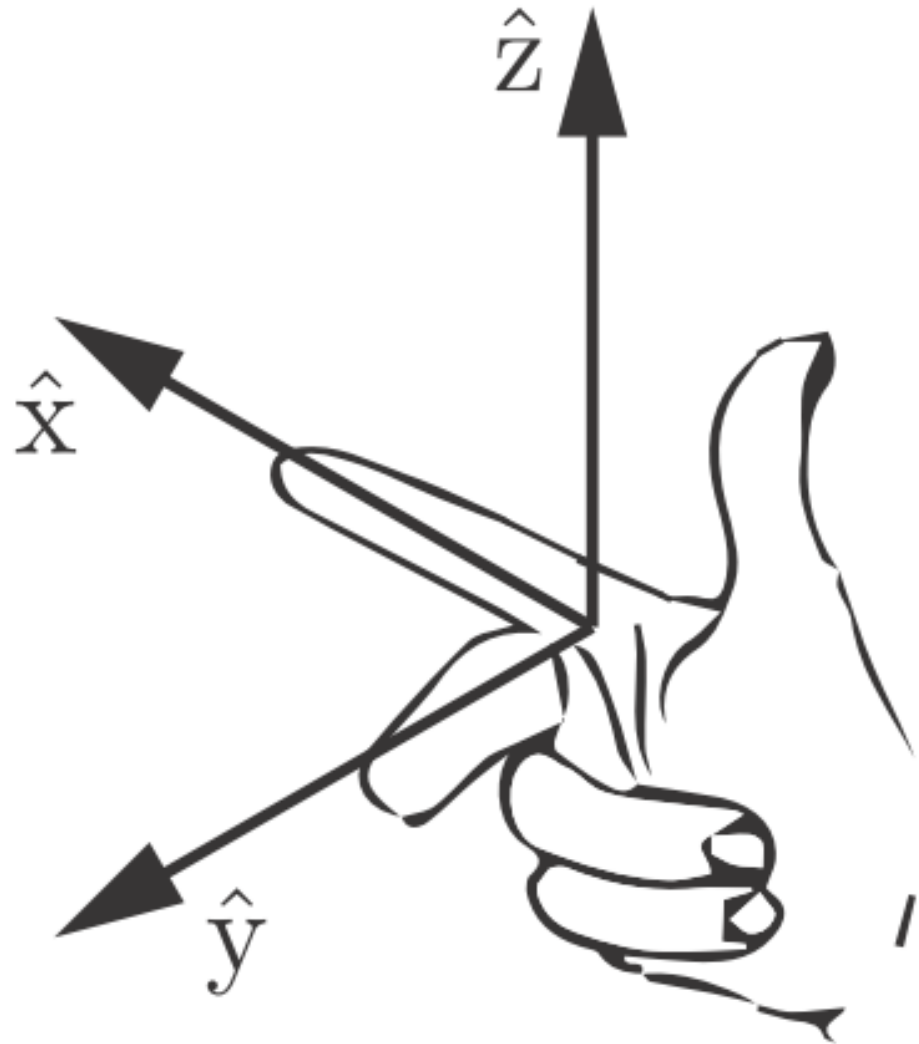


Συστήματα Αναφοράς (Reference Frames)

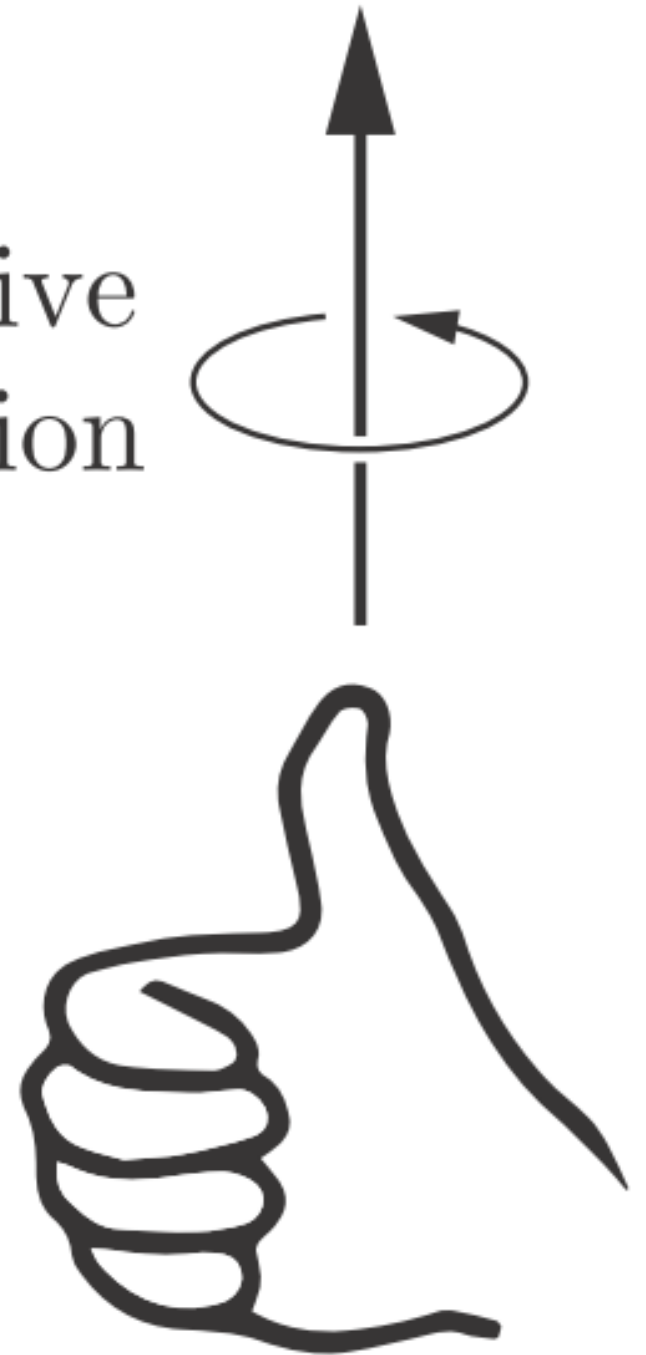
- Υποθέσεις

- σταθερή κλίμακα μήκους, αλλά διαφορετικές θέσεις και προσανατολισμοί
- οποιαδήποτε τοποθέτηση οδηγεί σε εξίσου έγκυρη περιγραφή του χώρου
- πάντα υπάρχει και ένα μόνο **ακίνητο, σταθερό** (καθολικό) **σύστημα χώρου** $\{s\}$
- σε κάθε σώμα μπορεί να προσαρτηθεί ένα τοπικό, κινούμενο σύστημα σώματος $\{b\}$
- αρχή του $\{b\}$ σε κάποιο σημαντικό σημείο του σώματος, π.χ. στο κέντρο μάζας
- μπορεί η αρχή να είναι και εκτός του φυσικού σώματος (σταθερή σχετική στάση)
- **αδρανειακά (inertial) συστήματα**: όλα τα συστήματα αναφοράς είναι ακίνητα!
- κάθε σύστημα σώματος $\{b\}$ συμπίπτει στιγμιαία με ένα σύστημα κινούμενου σώματος
- **δεξιχειρικά (right-handed) συστήματα**: τα συστήματα αναφοράς είναι δεξιόστροφα!

Δεξιохειρικά Συστήματα

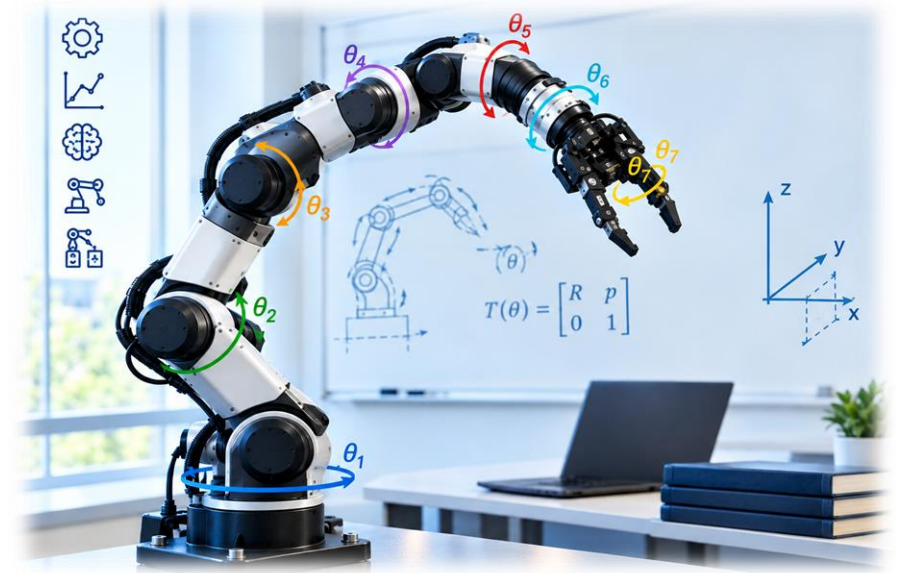


positive
rotation



Κίνηση στο Επίπεδο

Ενός στερεού σώματος...



Στο Επίπεδο

- Σταθερό σύστημα {s}
- Σύστημα σώματος {b}

$$p = p_x \hat{x}_s + p_y \hat{y}_s$$

$$p = (p_x, p_y)$$

$$- p = (2, 1), \vartheta = 60^\circ$$

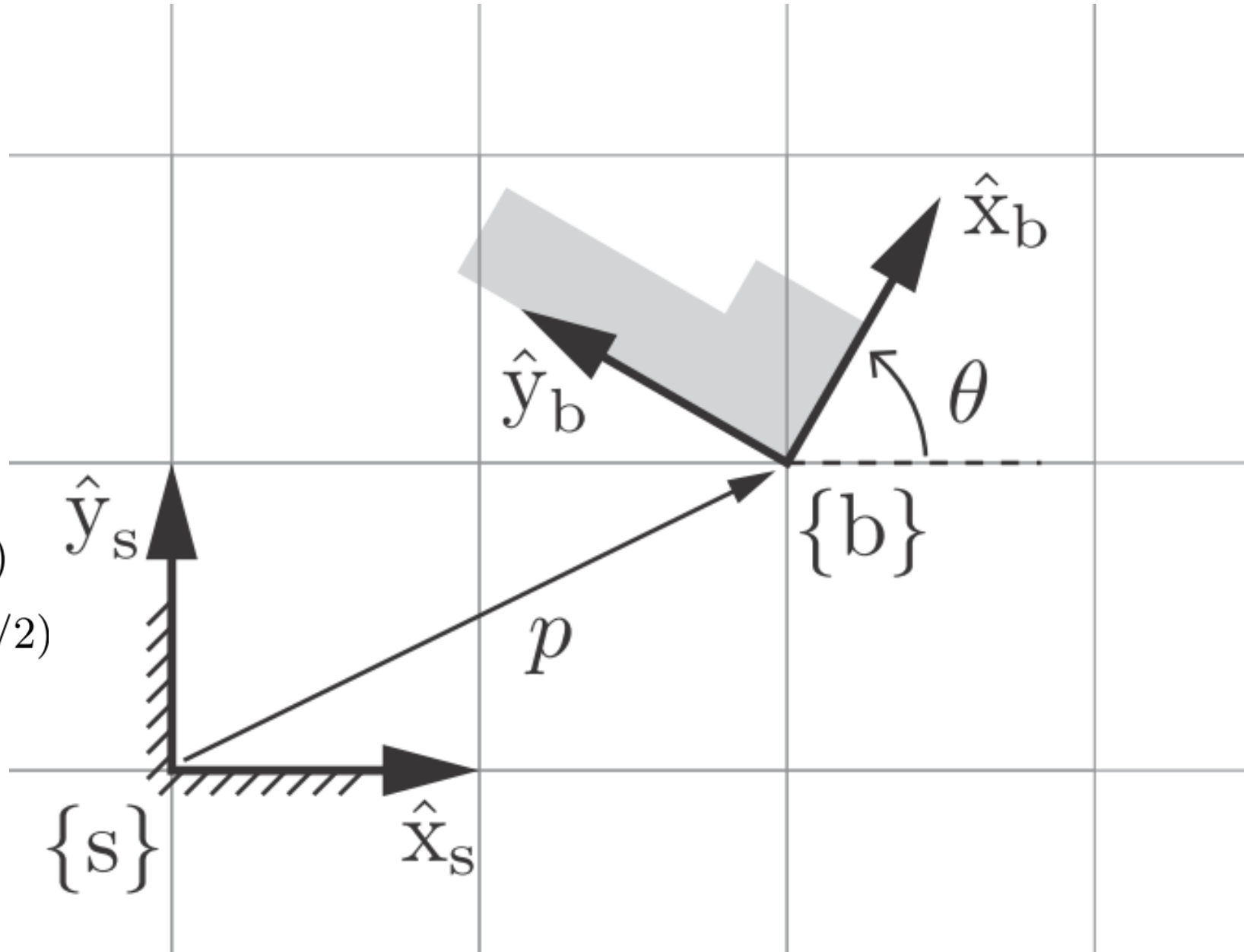
$$\hat{x}_b = (\cos \theta, \sin \theta) = (1/2, \sqrt{3}/2)$$

$$\hat{y}_b = (-\sin \theta, \cos \theta) = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$$

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta) \quad \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$$

$$\hat{x}_b = \cos \theta \hat{x}_s + \sin \theta \hat{y}_s,$$

$$\hat{y}_b = -\sin \theta \hat{x}_s + \cos \theta \hat{y}_s$$



Αναπαράσταση Συστήματος Αναφοράς

$$\begin{aligned}\hat{x}_b &= \cos \theta \hat{x}_s + \sin \theta \hat{y}_s, \\ \hat{y}_b &= -\sin \theta \hat{x}_s + \cos \theta \hat{y}_s\end{aligned}$$

- **Θέση συστήματος {b}**

- αναπαράσταση σημείου p ως διάνυσμα-στήλη στον R^2
- με συντεταγμένες ως προς $\{s\}$ (απαραίτητες και οι δύο)

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$$

- **Προσανατολισμός συστήματος {b}**

- αναπαράσταση με πίνακα P διαστάσεων 2×2
- πίνακας περιστροφής (rotation matrix)
- 4 αριθμοί που υπόκεινται σε 3 περιορισμούς
 - κάθε στήλη του P πρέπει να είναι μοναδιαίο διάνυσμα
 - οι δύο στήλες του P πρέπει να είναι ορθογώνιες μεταξύ τους
- ένας βαθμός ελευθερίας: η γωνία θ

$$P = [\hat{x}_b \ \hat{y}_b] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

- **Αναπαράσταση**

- το ζεύγος (P, p) περιγράφει πλήρως τον προσανατολισμό και τη θέση του $\{b\}$

Μετασχηματισμός

- {c} ως προς {s}

$$r = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}$$

- {c} ως προς {b}

$$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

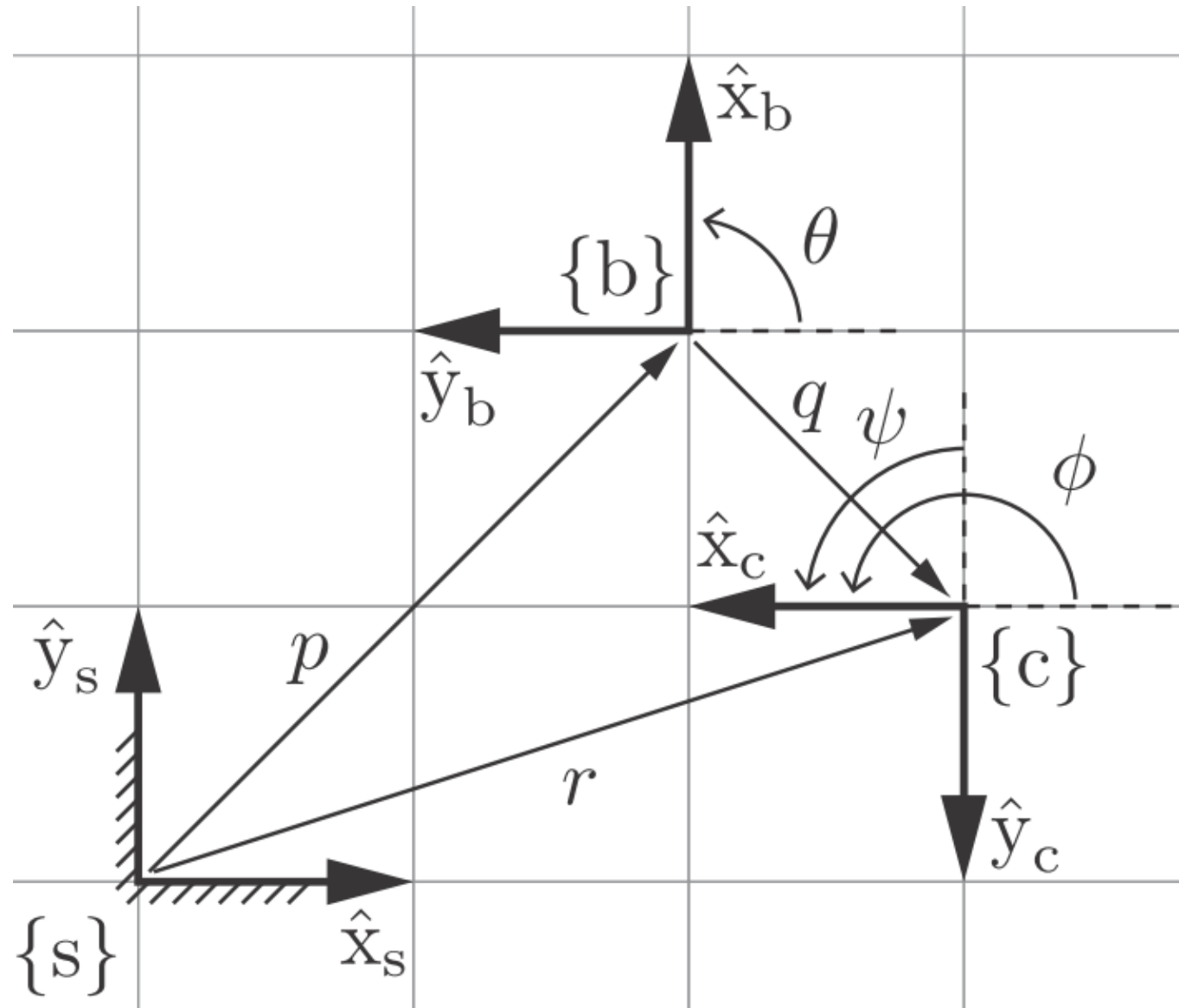
- {c} ως προς {s} μέσω {b}

$$R = PQ$$

$$r = Pq + p$$

- το (P, p) μετασχηματίζει κάθε αναπαράσταση από {b} σε {s}

$$p = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad P = [\hat{x}_b \ \hat{y}_b] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Κίνηση Στερεού Σώματος

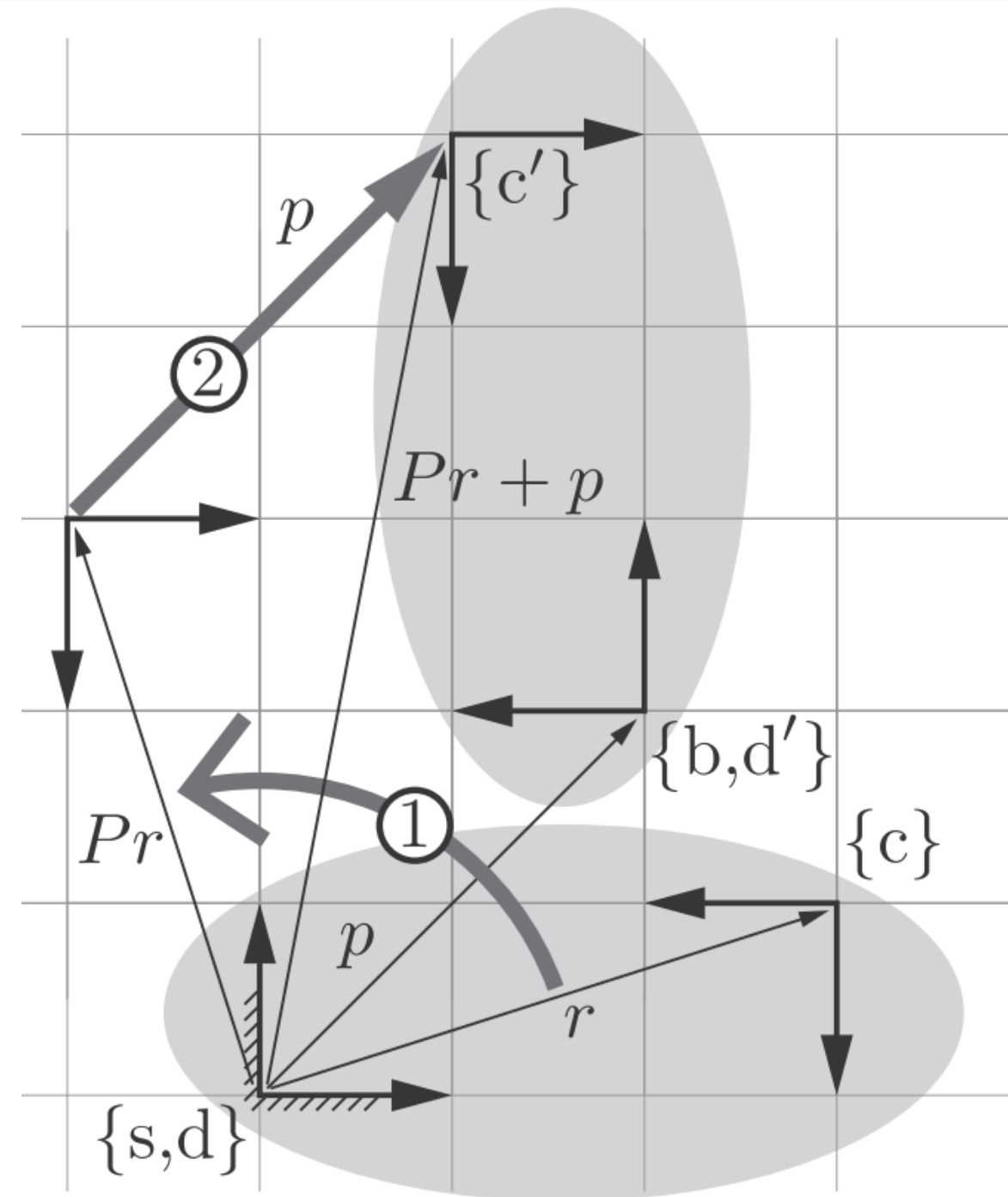
- $\{c'\}$ ως προς $\{s\}$

$$R' = PR,$$

$$r' = Pr + p$$

- Τριπλός ρόλος ζεύγος (P, p)

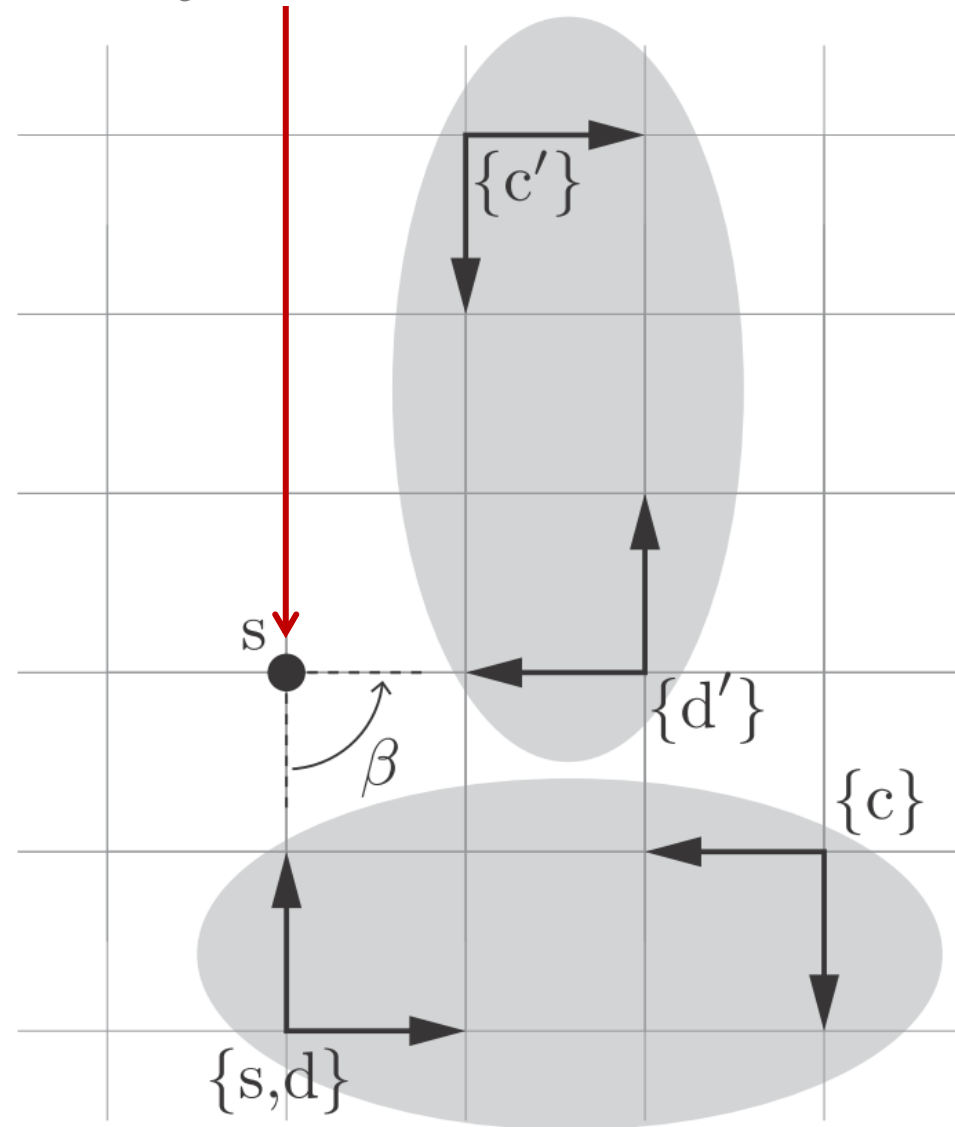
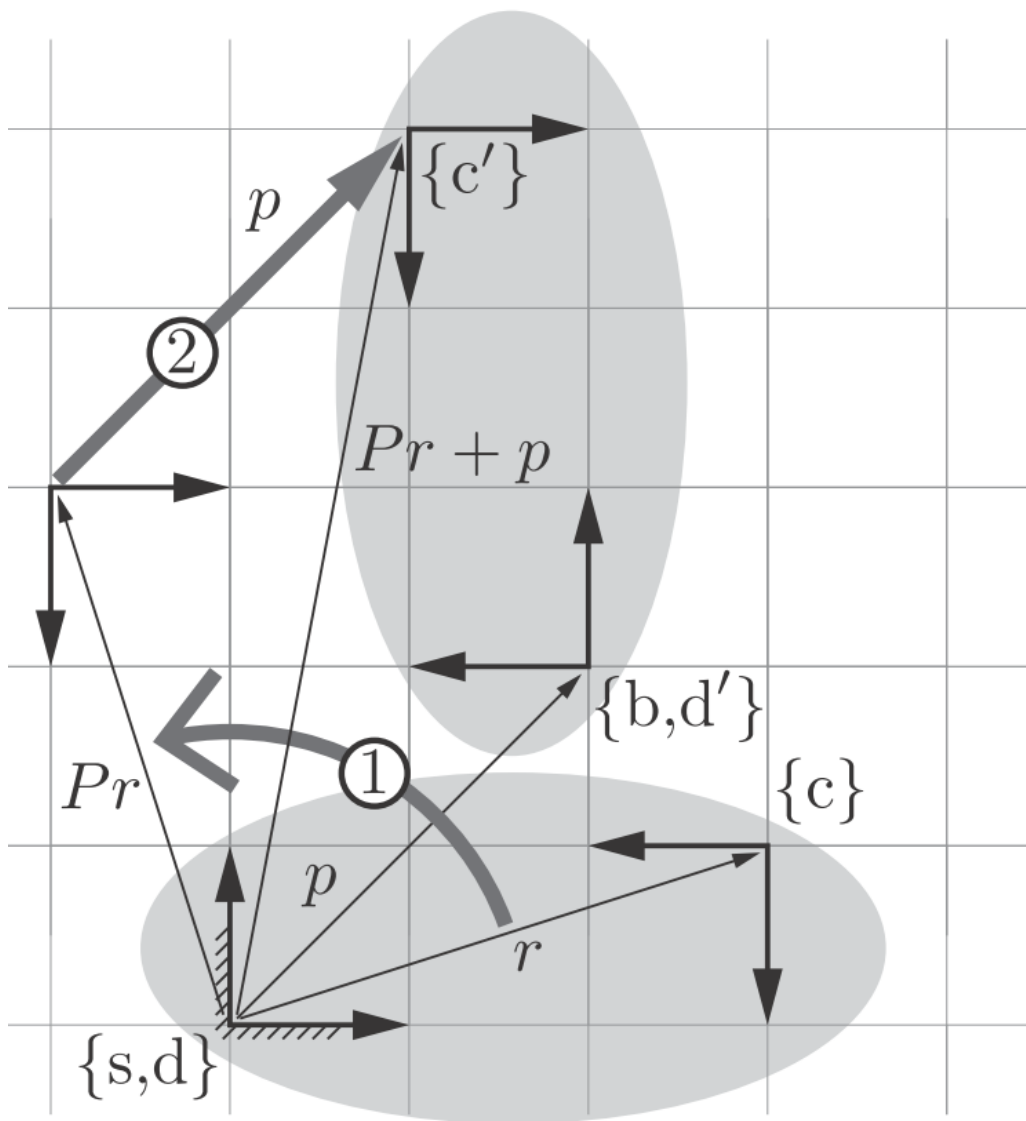
- αναπαράσταση στάσης στερεού σώματος στο $\{s\}$
- μεταβολή συστήματος αναφοράς στο οποίο αναπαρίσταται ένα διάνυσμα ή σύστημα
- μετακίνηση διανύσματος ή συστήματος αναφοράς



Ελικοειδής Κίνηση (Screw Motion)

$\beta = 90^\circ$ 3 συντεταγμένες
 $(s_x, s_y) = (0, 2)$ κοχλία: (β, s_x, s_y)

Η ίδια κίνηση
 στο επίπεδο
 μπορεί να
 εκφραστεί ως
 συστροφή
 ενός κοχλία,
 κάνοντας χρήση
 των εκθετικών
 συντεταγμένων!



άξονας κοχλία: $\mathcal{S} = (\omega, v_x, v_y) = (1, 2, 0)$, εκθετικές συντ.: $\mathcal{S}\theta = (\pi/2, \pi, 0)$, συστροφή: $\mathcal{V} = \mathcal{S}\theta$

Ευχαριστίες

- Ελευθέριος Δοϊτσίδης (Αν. Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Σάββας Πιπερίδης (ΕΔΙΠ Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Νικόλαος Τσουρβελούδης (Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Νικόλαος Βλάσσης (πρ. Καθ. Σχολής ΜΠΔ Πολυτεχνείου Κρήτης)
- Κωνσταντίνος Κυριακόπουλος (Ομ. Καθ. Σχολής ΜΜ, ΕΜΠ)
- Αντώνιος Τζες (πρ. Καθ. Τμήματος ΗΜΤΥ Πανεπιστημίου Πατρών)
- Γεώργιος Φουσκιτάκης (Αν. Καθ. Τμήματος ΗΜ, ΕΛΜΕΠΑ)